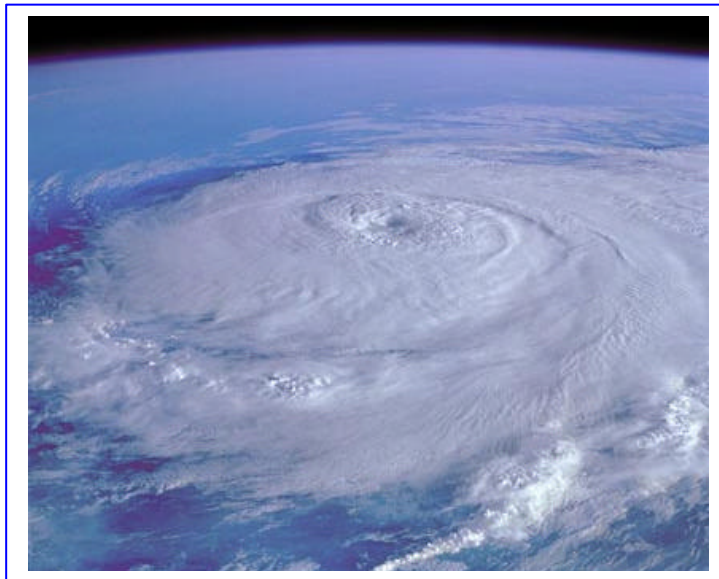


# Kurzperiodische Luftdruckschwankungen im Zusammenhang mit Grosswetterlagen

Peter C. Maurer (Jg. 83)

Betreuung durch  
Prof. Dr. Hans Richner  
Peter Senn, PhD



Wettbewerbsarbeit Schweizer Jugend forscht

Zürich 2003

## Vorwort

In einem Gespräch mit meinem Physiklehrer P. Senn PhD, hat mir dieser erzählt, dass er bei Druckmessungen, ihm unbekannt periodische Druckschwankungen festgestellt hatte. Mir war aus der Meteorologie schon bekannt, dass sich bei Föhn an Kaltluftseen Grenzschichtwellen bilden konnten. Diese Wellen können dann kurzperiodische Luftdruckschwankungen verursachen. In dieser Diskussion wurde mein Interesse bezüglich diesem Thema geweckt und Herr Senn meinte dieses Gebiet würde sich, weil der instrumentelle Anspruch nicht allzu gross sei, gut als Maturitätsarbeit eignen. Ich war von dieser Idee begeistert und informierte mich eingehender über das Entstehen von kurzperiodischen Luftdruckschwankungen. Dabei stellte ich fest, dass weder in der Fachliteratur noch bei Experten etwas über die Entstehung von Luftdruckschwankungen bei Bisenlage zu finden war. Zwar ist es höchst wahrscheinlich, dass diese Frage schon einmal in irgend einem Zusammenhange beschrieben wurde, aber dennoch fand ich in der Literatur nichts darüber.

Nach dem negativen Ergebnis unseres Versuches, wäre es höchst interessant, abzuklären, ob bei Bise, in der Region zwischen Jura und Alpen, dennoch periodische Druckschwankungen auftreten. Anschliessend könnte man dies mit Höhendondierungen von Payern vergleichen.

Ich möchte an dieser Stelle Prof. Dr. H. Richner, der sich als Experte zur Verfügung stellte, herzlich danken. Es war mir eine besondere Ehre, dass Herr Richner, welcher auf diesem Gebiet doch eine der kompetentesten Personen überhaupt darstellt, meine Arbeit betreute und mir soviel Zeit zur Verfügung stellte. Erst durch seine fachmännischen Ratschläge war es möglich die Arbeit mit noch fehlenden Punkten zu ergänzen. Im Besondern möchte ich meinem Physiklehrer P. Senn PhD, der mit viel Einsatz für ein Gelingen dieser Arbeit einstand, danken. Sowohl im fachlichen Sinn als auch in Besprechungen, hat er mir Hilfe geboten und durch die Beschaffung der notwendigen präzisen Instrumente die Durchführung der Arbeit ermöglicht. Verbunden bin ich auch Dr. S. Gubser, der mir gerade in der Entstehungszeit, durch qualifizierte Auskunft, in mehreren Gesprächen, für das Gelingen der Arbeit wertvolle Tipps gab. Auch möchte ich mich bei MeteoSchweiz, welche mir essentielle Daten zur Verfügung stellten bedanken. Im weiteren bedanke ich mich bei all denjenigen, die diese Arbeit durchsahen oder in anderer Weise sich mit meiner Maturitätsarbeit auseinandersetzen.

## Inhaltsverzeichnis

1.	<u>Einleitung</u>	4
2.	<u>Theorie</u>	5
	2.1. Grenzschichtwellen als Ursache kurzperiodischer Luftdruckschwankungen	5
	2.2. Entstehung von Grenzschichtwellen	5
	2.2.1 Stabilitäten der Atmosphäre	5
	2.2.2 Inversion	5
	2.2.3 Interpretation	6
	2.3. Grenzschichtwellen als Folge bestimmter Wetterlagen	6
3.	<u>Unsere Hypothese</u>	8
	3.1 Hypothese für die Entstehung von Grenzschichtwellen bei Bise	8
4.	<u>Aufbau des Versuches</u>	9
	4.1. Verwendete Instrumente	9
	4.2. Geographische Lage	10
	4.3. Zeitpunkt der Messungen und vorherrschende Wetterlagen	11
5.	<u>Auswertungen</u>	12
	5.1. Übersicht	12
	5.2. Detrending	12
	5.1.1. Notwendigkeit	12
	5.1.2. Möglichkeiten des Detrending	13
	5.3. Durchführung der Fourier-Analyse	15
	5.4. Approximation	16
	5.5. Differenz von FFT und Approximation	19
6.	<u>Resultate</u>	20
	6.1. Differenz von Spektralkoeffizienten und Approximation	20
	6.1.1. Rangkorrelation	20
	6.2. Bemerkung zur Approximation der Spektralkoeffizienten	29
	6.2.1. Approximation der Spektralkoeffizienten	29
7.	<u>Zusammenfassung</u>	32
8.	<u>Mathematische Hilfsmittel</u>	33
	8.1 Fourier-Analyse	33
	8.1.1 Fourier-Reihe	33
	8.1.2 Entwicklung nach Fourierkoeffizienten	33
	8.1.3 Symmetriebetrachtung	36
	8.1.4 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	37
	8.1.5 Schnelle Fourier-Transformation (FFT)	38
	8.2. Spearmansche Rangkorrelation	38
	8.3. Koeffizientenvergleich	39
9.	<u>Literaturverzeichnis</u>	40
10.	<u>Glossar</u>	41

## 1. Einleitung

Es ist bekannt, dass sich bei Föhn (in Kaltluftseen) und bei Westwind (genauer an den Fronten einer Zyklone) Grenzschichtwellen bilden. Diese kann man am Boden in Form von kurzperiodischen Luftdruckschwankungen messen. Diese Schwankungen haben typischerweise Amplituden von 0.01-1hPa für Föhn bzw. 0.05-2hPa für Westwindlage, mit Perioden von 250s-1500s bzw. 180s-1800s.

Diese Arbeit beschränkt sich, auf Grund der uns zur Verfügung stehenden technischen Mittel, auf eine Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Grosswetterlagen und periodischen Druckschwankungen. Das erlaubte uns mit 103 Messungen ein auf einen relativ grossen Stichprobenumfang gestütztes Ergebnis zu finden. leider mussten wir bei einer solchen Datenmenge auf eine ausführliche Analyse jeder einzelnen Messung verzichten. Da es im Rahmen einer Maturitätsarbeit unmöglich ist, die Wellenfunktion von Grenzschichtwellen genau wiederzugeben und wir nicht über die Messeinrichtung, die zu dieser Untersuchung in der Lage gewesen wären, verfügten, mussten wir uns damit begnügen, zu bestimmen, ob Luftdruckschwankungen auftreten und wie gross ihre Frequenz ungefähr sein muss.

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen, im ersten Teil werden wir uns mit den schon weitgehend untersuchten Druckschwankungen bei Westwind auseinander setzen. Diese Ergebnisse können dann mit schon bestehender Literatur verglichen werden. Es kann gleichzeitig als quantitative Untersuchung der durch Westwind entstandenen Druckschwankungen betrachtet werden. Im anderen Teil werden wir überprüfen, ob es auch bei Bisenlage, welche nach unserer Ansicht alle notwendigen Bedingungen erfüllt, zu Druckschwankungen kommen kann. Ich habe zu dieser Frage trotz Nachforschungen in Fachliteratur, dem Internet und Gesprächen mit meinem Geographielehrer A. Suter, Physiklehrer P. Senn und Dr. S. Gubser (Doktorarbeit auf dem Gebiet von Druckschwankungen bedingt durch Grenzschichtwellen) keine Antwort gefunden.

Zunächst erklären wir die vorherrschende Theorie zur Entstehung von kurzperiodischen Luftdruckschwankungen und zeigen wie die metrologischen Mechanismen, in ihren Grundzügen, bei der Bildung von Grenzschichtwellen bei Föhn bzw. Westwind, ablaufen. Dann postulieren wir unsere Vermutung zu Luftdruckschwankungen bei Bise. Anschliessend beschreiben wir den Versuchsaufbau und sagen etwas über die geographische Lage und den Zeitpunkt der Messwerterfassung. Danach werden wir die erforderlichen mathematischen Hilfsmittel, die wir in unserer Arbeit benötigen, in ihren Grundzügen erläutern. Dann werden wir das rechnerische Vorgehen zur Transformation der Daten besprechen. Dies beinhaltet eine Diskussion über die Notwendigkeit von Detrendings, das Vorgehen mittels der FFT (Fast Fourier Transformation) und das daran anschliessende Bestimmen einer Approximation. Dabei werden wir die wichtigsten von uns geschriebenen Programme auflisten. Der anschliessende Teil befasst sich mit der Suche nach einem Zusammenhang zwischen den ermittelten Daten und den Grosswetterlagen.

## 2. Theorie

### 2.1. Grenzschichtwellen als Ursache kurzperiodischer Luftdruckschwankungen

Kurzperiodische Luftdruckschwankungen können verschiedene Ursachen haben (z.B. turbulente Strömungen an Hindernissen oder Wellenbildung an Grenzschichten). Wir konzentrieren uns im Rahmen dieser Arbeit auf Druckschwankungen, die durch Verwirbelung von Grenzschichten entstehen.

### 2.2. Entstehung von Grenzschichtwellen

#### 2.2.1 Stabilitäten der Atmosphäre

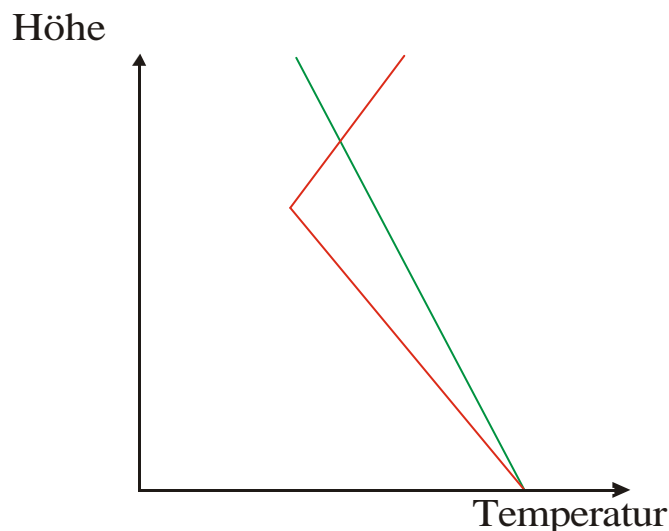
Um den Mechanismus von Schwerewellen zu verstehen, müssen wir uns erst einige Gedanken zu den Stabilitäten der Atmosphäre machen. Um den stabilen Zustand zu erklären, betrachten wir nun ein imaginäres Luftpaket auf einer bestimmten Höhe. Wenn wir dieses Luftpaket durch einen Kraftstoss in vertikale Richtung beschleunigen, wird es beispielsweise aufsteigen. Ist der trockenadiabatische Temperaturgradient  $\gamma_{Ad}$  ( $\gamma_{Ad}=0.98^\circ\text{C}/100\text{m}=g/c_p$ ) kleiner als der tatsächliche Temperaturgradient  $\gamma$ , dann wird das Luftpaket beim Aufsteigen durch adiabatische Expansion mehr abkühlen als die Umgebung. Dies bewirkt eine Beschleunigung des Luftpaketes in die andere Richtung. Beim Absinken wird nun die Luft adiabatisch komprimiert und erwärmt sich schneller als die Umgebung (denn  $\gamma_{Ad}<\gamma$ ). Wir erhalten nun eine harmonische Schwingung.

Ein instabiler Zustand kommt dann zustande wenn  $\gamma_{Ad}>\gamma$ . Es ist nicht schwer zu sehen, dass dann ein einmal ausgelenktes Luftpaket beliebig weit aufsteigen oder absinken kann.

#### 2.2.2 Inversion

Bei einer Inversion nimmt, in einem bestimmten Bereich, die Temperatur mit der Höhe zu statt ab. Dies bewirkt im unteren Teil eine instabile und im oberen eine stabile Schichtung (Einführung in die Meteorologie, Atmosphärenphysik und -chemie).

Abb. 2.1

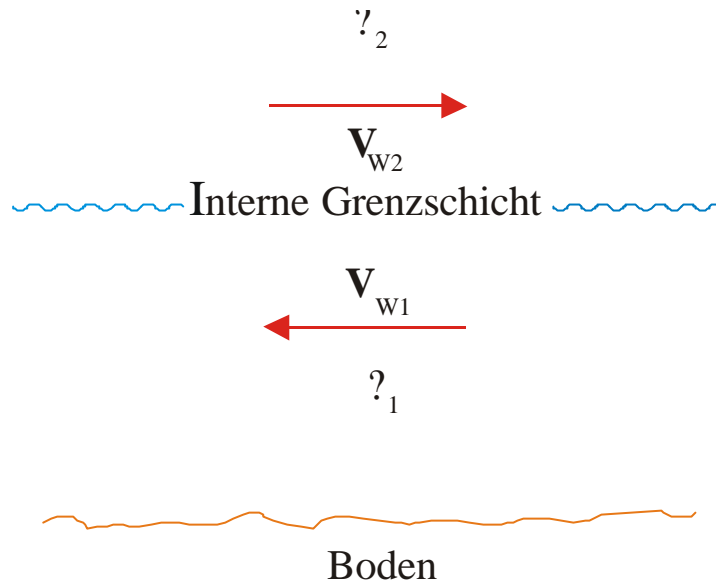


Die grüne Gerade entspricht dem trockenadiabatischen Temperaturgradient und die Rote dem tatsächlichen Temperaturverlauf bei Inversionslage. Der untere Teil ist eine instabile und der obere eine stabile Schichtung.

### 2.2.3. Interpretation

Unter bestimmten Umständen können periodische Druckschwankungen gemessen werden. Dies kann prinzipiell immer dann beobachtet werden, wenn sich eine interne Grenzschicht bildet und sich die Luftschichten mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen  $v_{w1}$  /  $v_{w2}$  (Abb. 2.2).

Abb. 2.2



*Schematische Darstellung einer Grenzschicht in der Troposphäre. An dieser Grenzschicht können sich nun Schwerewellen bilden (schematisch als Wellenlinie gedruckt).*

Da in den verschiedenen Schichten unterschiedliche Windgeschwindigkeiten herrschen, verwirbelt sich die Grenzschicht, was die Entstehung von Transversalwellen bewirkt (dieser Effekt ist Analog zu Wellenbildungen auf einer Wasseroberfläche). Passiert dann ein Wellenberg die Messstation können wir einen höheren Schweredruck registrieren als in einem Wellental. Dies hat zur Folge, dass wir, abhängig von der Windgeschwindigkeitsdifferenz, periodische Druckschwankungen mit unterschiedlichen Frequenz messen können.

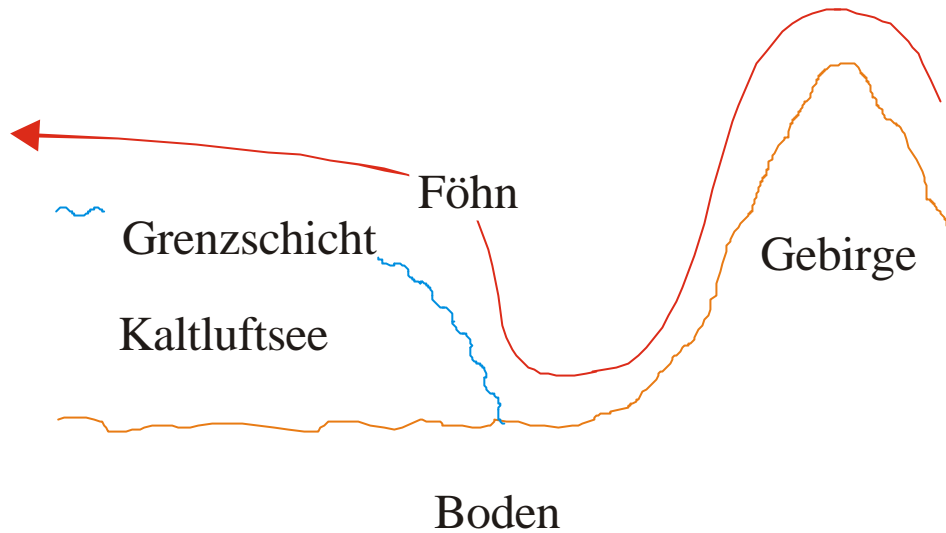
### 2.4. Grenzschichtwellen als Folge bestimmter Wetterlagen

Die Frage ist nun, unter welchen Voraussetzungen eine solche Wellenbildung erfolgt. Es ist bekannt, dass sich solche Verwirbelungen bei gewissen Wetterlagen ausbilden können. Ein klassischer Fall bietet sich in einem Kaltluftsee bei Föhnlage. Hier fegt der warme und somit weniger dichte Föhn über die kalten dichten Luftmassen des Kaltluftsees und bewirkt so eine Entstehung von Grenzschichtwellen (Abb. 2.3), was periodische Druckschwankungen zur Folge hat (Perioden 250s-1500s nach Georg und Young 1972).

Eine andere Möglichkeit besteht darin, dass sich bei Westwind Zyklonen über die Messstation bewegen. Warmfronten von solchen Zyklonen sind relativ breit und haben eine verhältnismässig kleine Steigung. Dies bedeutet, dass ein ähnlicher Effekt wie bei Föhn entsteht, denn es schiebt sich weniger dichte Luft des Warmluftsektors über dichtere Kaltluft und es kommt zu den selben Verwirbelungen. An einer Kaltfront geschieht gerade das Umgekehrte. Es strömen kalte Luftmassen unter den Warmluftsektor und bewirken das selbe.

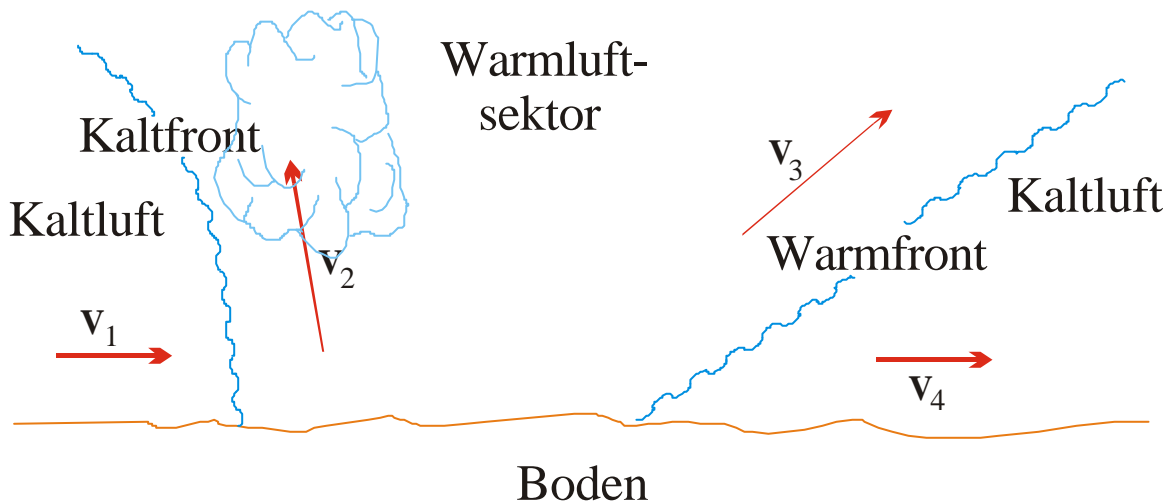
Nach Richner 1977 sind die dabei zu registrierenden Amplituden umso grösser, je stärker die Front ausgeprägt ist, und zusätzlich sind die Amplituden bei Kaltfronten grösser als bei Warmfronten (Abb. 2.4). Die Perioden der hier entstehenden Wellen bewegen sich im Bereich von 180s-1800s, gemäss Georg und Young 1972.

Abb. 2.3



Systematische Darstellung einer typischen Föhnlage mit Kaltluftsee und Grenzschicht an welcher Grenzschichtwellen entstehen können. (Graphik ist in der x-Achse stark gestaucht).

Abb. 2.4



Schematische Darstellung des Querschnitts durch eine Zyklone (ohne Okklusion). An den Fronten können sich nun Grenzschichten bilden (als gewellte Linie abgebildet). Die Strömungsrichtungen der Luftmassen sind mit Pfeilen symbolisiert. An der Kaltfront ist noch zusätzlich die dafür charakteristische Kumulusbewölkung abgedruckt. (Die x-Achse ist stark gestaucht dargestellt).

Es kann aber auch eine völlig andere Entstehungsursache für kurzfristige Druckschwankungen geben, nämlich indem an der Leeseite eines Hindernisses (z.B. Hügel) der Wind eine turbulente Strömung verursacht, was keinen Zusammenhang mit Grenzschichtwellen hat und nur vom Relief abhängt. Die Periodenlänge der Druckschwankungen bei diesem Effekt kann stark variieren.

Bei Gewittern haben wir ebenfalls die Möglichkeit Druckschwankungen zu messen, deren Entstehungsgründe aber noch unklar sind. Möglicherweise werden sie durch Konvektionsströme, Turbulenzen oder Blitze verursacht.



### 3. Unsere Hypothese

#### 3.1 Hypothese für die Entstehung von Grenzschichtwellen bei Bise

Bei Bise kann sich im Winter ebenfalls eine Grenzschicht bilden. Denn es fliesst kalte kontinentale Luft aus einer Antizyklone, in Skandinavien, in eine Zyklone über dem Mittelmeer. Dieser kalte und dichte Luftstrom bewegt sich nun entlang dem Boden, wobei er sich nicht mit den darüber liegenden wärmeren Luftmassen durchmischt. In der Regel bildet sich an dieser Grenzschicht eine Stratuswolkendecke (es stellt sich eine Inversion ein). Diese Kaltluftschicht hat üblicherweise eine Mächtigkeit von 500m bis 2000m (Schweizerischer Pool für Luftfahrtversicherungen). Die Bise kann relativ hohe Windgeschwindigkeiten erreichen ohne die Inversion durchbrechen zu können. Dieser Effekt ist in der Umgebung von Genf besonders ausgeprägt, weil die Bisenströmung durch Alpen und Jura kanalisiert wird und so stark an Geschwindigkeit zunimmt. Bei solchen Strömungen kommt es zu ausgeprägten Verwirbelungen (Abb. 3.1) (Schweizerischer Pool für Luftfahrtversicherungen).

Abb. 3.1



*Nord-Süd-Querschnitt durch die Schweiz bei Bisenlage mit ausgebildeter Inversion. Die starken turbulenten Verwirbelungen sind als Pfeile schematisch wiedergegeben. Die Windrichtung verläuft senkrecht in die Bildebene.*

Die Frage ist nun, ob diese Verwirbelungen an der Grenzschicht eine Bildung von Transversalwellen bewirken, die wir als kurzperiodische Druckschwankungen messen können. Wir werden später im Kapitel Diskussion auf unsere Hypothese zurückkommen und sie überprüfen.

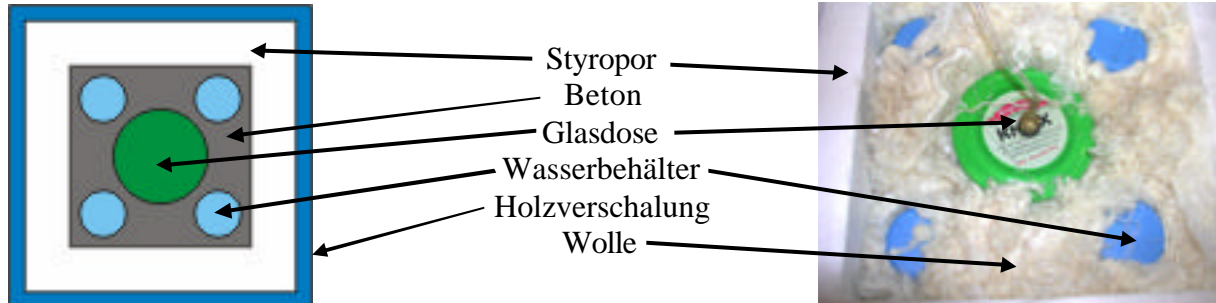
## 4. Aufbau des Versuches

In diesem Kapitel werden wir erst eine Diskussion über die Genauigkeit der Messinstrumente führen, was für die Auswertung von grosser Bedeutung ist. Anschliessend setzen wir uns mit der geographischen Lage des Standortes, an dem die Datenaufnahme erfolgte, auseinander. Dies spielt besonders bei der Interpretation im nächsten Teil eine erhebliche Rolle.

### 4.1. Verwendete Instrumente

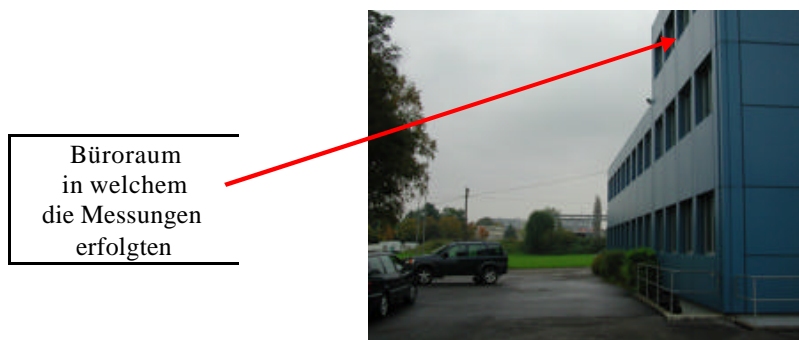
Die Messwertaufnahme erfolgte durch einen relativen Luftdruckmesser von CASSY (5290404), der eine Messbreite von 70hPa besitzt und eine Ungenauigkeit von weniger als 1% (d.h.  $\Delta p_{\text{Fehler}} < 0.7\text{hPa}$ ). Diese Genauigkeit ist zwar rund sechs Mal kleiner als diejenige von den an der ETH Zürich eingesetzten Sonden zur Registrierung der Druckschwankungen bei Föhnlage mit  $\Delta p = 0.15\text{hPa}$  (Bezug auf Gespräch mit Dr. S. Gubser). Dennoch sollten die von uns verwendeten Geräte Luftdruckschwankungen registrieren können, zumindest wenn die Grenzschicht genügend stark ausgeprägt ist, d.h. wenn sich die Windgeschwindigkeiten und Temperaturen der Luftmassen erheblich unterscheiden. Das Messgerät von CASSY ermittelt den Druckunterschied zwischen zwei Ausgängen, wobei wir den einen mit einem druckfesten, wärmeisolierten Referenzgefäss verbanden. Das Referenzgefäss musste vor Temperaturänderungen geschützt sein. Eine geringe Änderung der Temperatur könnte die Messwerte stark verändern (Beispiel: ändert die Temperatur von 20°C auf 21°C würden wir eine Druckänderung von ca. 3.5hPa erhalten).

Abb. 4.1 a



*Schematische und photographische Wiedergabe des Referenzgefässes. Sicht von oben. Die Wolle auf dem Photo dient der Isolation (in schematischen Abbildung weggelassen).*

Abb. 4.1.b



*Gebäude in welchem der Luftdruck gemessen wurde.*

Wir gossen deshalb eine Glasdose, welche über einen Schlauch mit der Sonde in Verbindung stand, in Beton ( $c_p=1000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $\lambda=0.19 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) ein. Wir brachten zudem 1700ml Wasser, um die spezifische Wärmekapazität  $c_p$  zu erhöhen ( $c_p=4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $\lambda=0.609 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ), auf 4 Flaschen verteilt, im Beton an. Um die Wärmeleitfähigkeit noch weiter herunterzusetzen platzierten wir dies, in eine 6cm dicke Styroporverschalung ( $\lambda=0.04 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ). Aus Stabilitätsgründen und für einen einfacheren Transport wurde eine zusätzliche Holzverkleidung von 2cm Dicke verwendet ( $\lambda=0.12 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) (Abb. 4.1 a).

Das Referenzdruckgefäss wirkte zusätzlich noch als Tiefpassfilter, da wir über einen längeren Zeitraum, von einem gewissen Druckausgleich zwischen Gefäss und Umgebung ausgehen könnten. Dabei muss gesagt werden, dass die so herausgefilterten Frequenzen um einiges grösser waren als die Gesuchten.

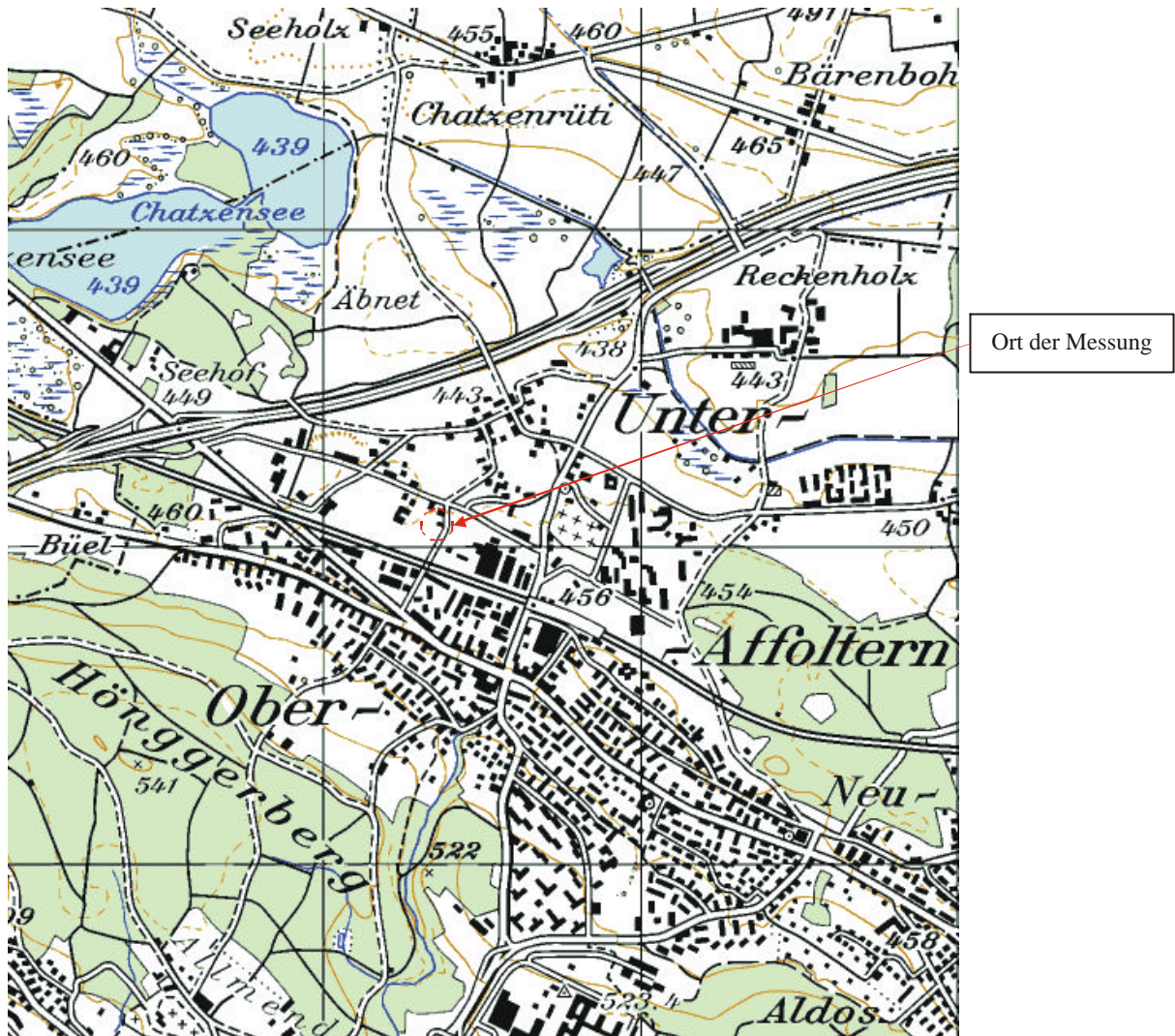
Die von der Sonde aufgenommenen Werte wurden durch das Programm „Universelle Messwerterfassung“<sup>©</sup> (von Dr. Michael Hund von Leybold Didactic GmbH), als über ein Intervall von einer Sekunde gemittelte Werte, aufgezeichnet. Eine Messperiode erstreckt sich über einen Zeitraum von ein bis zwei Tagen (80000-160000 Messwerte). Anschliessend überschrieben wir die Daten auf einen Pentium 4 (1.7GHz) Computer zur Auswertung. Bei diesem Umfang von Messwerten war es zwingend einen so leistungsstarken PC zu verwenden, da die FFT und Umrechnungen für passende Darstellungsarten sehr rechenintensiv sind. Wir änderten dann die Daten in ein ASCII Format, welches für „Excel“ lesbar ist und trennten die einzelnen Messwerte durch Kommata, damit sie ins Programm „Mathematica 4.1 for Student“ importiert werden konnten, wo wir dann die FFT berechneten.

#### 4.2 Geographische Lage

Der Standort der Messanlage war in Zürich-Affoltern, d.h. bei Bisenlage ist die Wahrscheinlichkeit für eine Inversion, die in diesem Fall eine Voraussetzung für die Bildung von Grenzschichtwellen ist, relativ hoch. Da der Wind von keinem Gebirge gebremst wird, können wir, bei Bise, in Zürich hohe Windgeschwindigkeiten registrieren. Jedoch wären die Windgeschwindigkeiten zwischen Jura und Alpen bei weitem grösser, da die Bise von den beiden Gebirgsketten kanalisiert wird und so extrem hohe Geschwindigkeiten erreichen kann (Hack K.H. 1981).

Auch ist in der Umgebung des Messortes die Überbauung ziemlich gering. Es ist keine starke Verwaltung vorhanden und das Relief ist nicht besonders markant, was ein Rauschen durch Turbulenzen an Hindernissen stark verringert (Werner N. 1979). Es muss aber dennoch bemerkt werden, dass die Messstation nordöstlich des Hönigerberges liegt (Abb. 4.2) und sich so bei Westwindlage Leewellen bilden können. Ob dieser Effekt wirklich registrierbar ist, ist schwer zu sagen.

Abb. 4.2



Kartenausschnitt entnommen einer 1:50'000 Karte. Das Bild zeigt Zürichnord. Der Kreis markiert das Gebäude in welchem die Messungen gemacht wurden (Ausschnitt aus Swiss Map 50).

#### 4.3. Zeitpunkt der Messungen und vorherrschende Wetterlagen

Es wurden 33 Messungen innert zwei Monaten vom 6.12.02-30.01.03 durchgeführt. Die Messwerte wurden über eine Sekunde gemittelt und registriert.

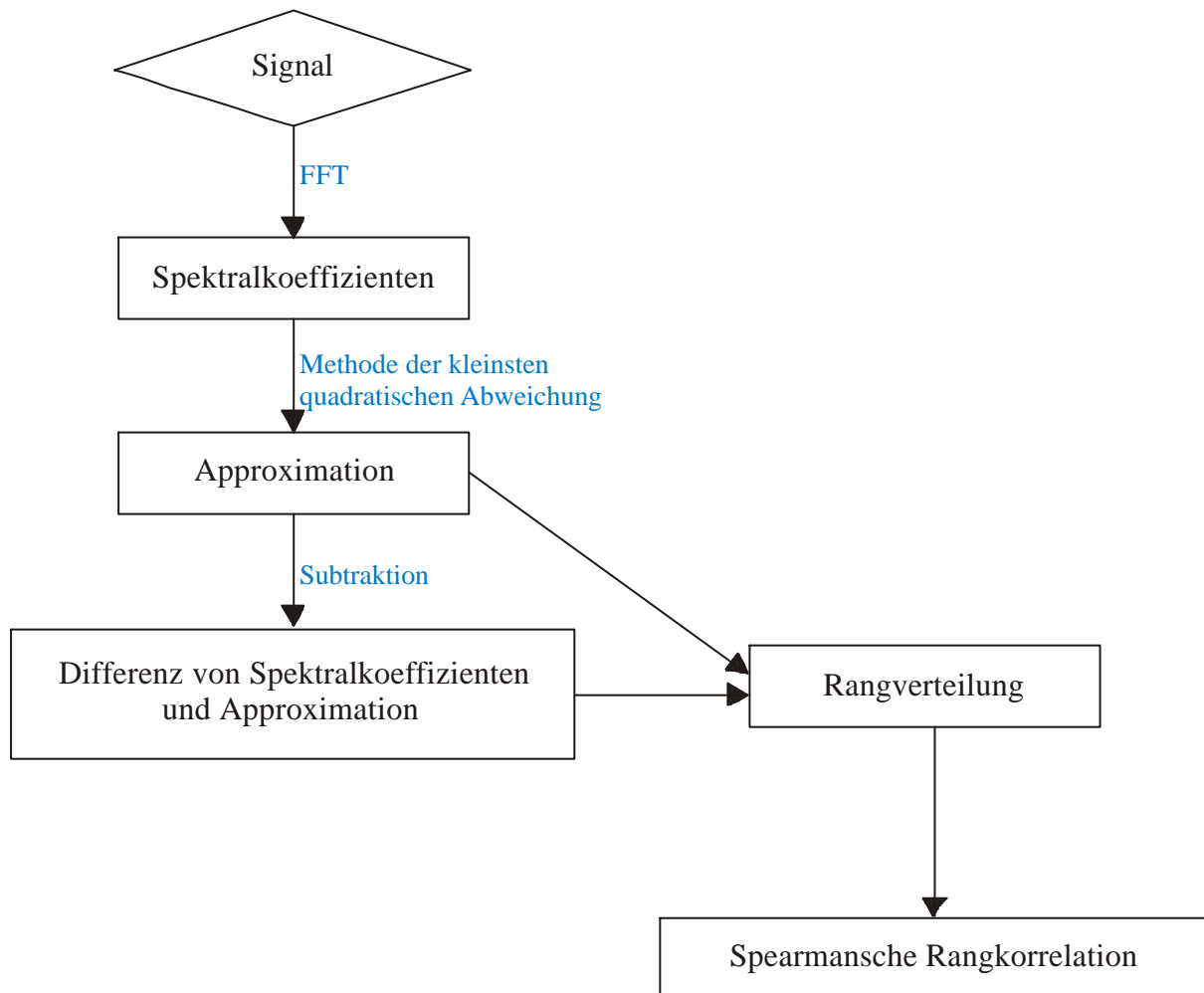
Zur Bestimmung der Grosswetterlagen wurden Wetterberichte aus der NZZ und Wetterkarten von MeteoSchweiz SMA verwendet. Eine exaktere Bestimmung der Klimaelemente und aktuellen Wetterlage erfolgte mittels Angaben von Böenspitzen (auf 10min), Zehnminutenmittel der Windgeschwindigkeit, Windrichtung, Temperatur und Sonnenscheindauer (als Mass für Bewölkung). Die Windrichtung und Windgeschwindigkeit/Böenspitze sind besonders wichtig für die Stärke, die Klassifizierung und den Aufbau/Zusammenbruch der Wetterlagen. Die Bodentemperatur ist ebenfalls von Nutzen für die Bestimmung der Stärke der Inversionen, da wir leider über keine geeigneten Temperaturprofile verfügten.

Es gilt ebenfalls anzufügen, dass wir nur 4 eindeutige bei Messungen Föhnlagen bzw. 1 Staulage registrierten, was für signifikante Aussagen, über diese beiden Wetterlagen, nicht hinreichend ist. Einige Fälle sind unklar, d.h. sie können nicht einwandfrei einer Wetterlage zugeordnet werden. Wir versuchten trotzdem, wann immer möglich, Messungen einer spezifischen Lage zuzuordnen, was manchmal zu Ausreissern führen konnte.

## 5. Auswertungen

### 5.1. Übersicht

Das untenstehende Flussdiagramm soll das Verfahren der Messwerterfassung und Auswertung dieser Daten verdeutlichen.



*Verfahren der Messwertaufnahme und der Auswertung.*

### 5.2. Detrending

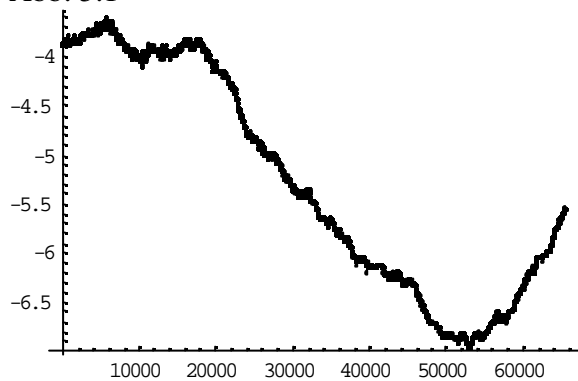
#### 5.2.1. Notwendigkeit

Es stellt sich die Frage, ob ein Detrending der Daten notwendig ist, oder ob eine Korrelation auch ohne ein solches mathematisches Verfahren zu bestimmen wäre. Hätte unser Tiefpassfilter alle Druckschwankungen welche von sich ändernden Wetterlage herrühren ausgefiltert, könnten wir ein Detrending problemlos weglassen. Wir müssten uns nicht mit der Frage beschäftigen, ob durch ein Detrending Resultate verfälscht werden. Leider unterliegt der Luftdruck der Dynamik der Meteorologie und kann in einigen Stunden mehrere Hektopascal fallen (Abb. 5.1), was für die Untersuchung der Grenzschichtwellen ohne Bedeutung, ja bei der FFT sogar störend ist. Macht man eine Fourier-Analyse einer solchen Überlagerung, werden die Spektralkoeffizienten der gesuchten Druckschwankungen um



einiges kleiner sein, als jene die von einer unperiodischen Druckschwankung bei Änderung der Grosswetterlage herrühren. Zur Verdeutlichung werden wir hierzu ein Beispiel, einmal mit geglätteten und einmal mit den unveränderten Daten, rechnen. Das Detrending geschieht mittels der kleinsten quadratischen Abweichung, auf die wir im folgenden Kapitel ausführlich eingehen werden. Als Beispiel verwenden wir die Messung des 17.12.02 von 01:36-07:10. Die Fourierkoeffizienten der Daten ohne Detrending zeigen annähernd einen exponentiellen Abfall, der etwa dem einer transformierten Geraden (d.h.  $c_n=2/(p n)$ , wobei  $c_n$  der n-ten Spektralkoeffizienten ist) entspricht. Dieser Sachverhalt ist auch zu erwarten gewesen, da der Druck relativ linear abnimmt. Die gleichen Messwerte wurden detrendet und wir erhalten erhalten Fourierkoeffizienten, die weniger abhängig von Wetteränderungen sind (Abb. 5.2).

Abb. 5.1



Messung des 17.12.02 von 01:36-07:10. Die y-Achse zeigt die Druckdifferenz in Hektopascal zwischen dem Referenzgefäss und dem aussen Druck, die x-Achse gibt die seit Start der Messung vergangene Zeit in Sekunden an..

Abb. 5.2 a)

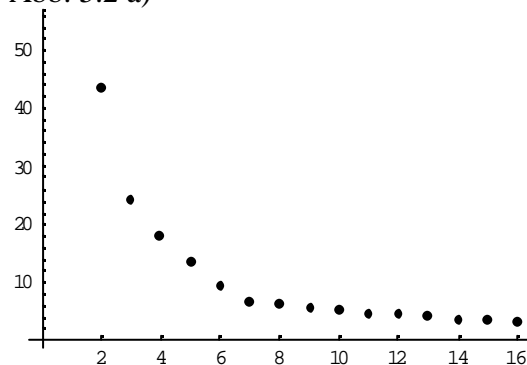
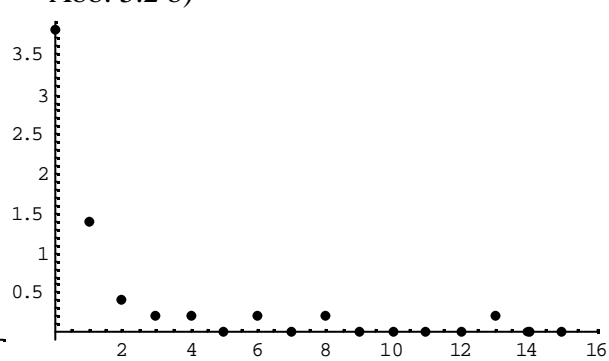


Abb. 5.2 b)



In a) ist die DFT eines ungeglätteten Signals gegeben. Sie ähnelt stark der FFT einer Geraden. In b) sieht man die Spektralkoeffizienten einer geglätteten Funktion. Die y-Achse stellt hier die Intensität und die x-Achse die Frequenz in  $h^{-1}$  dar.

Angenommen wir würden eine Korrelations-Analyse der Fourierkoeffizienten machen, die nicht von geglätteten Daten stammen, würden wir eine Beziehung zwischen kontinuierlichen Änderungen des Luftdruckes herstellen und nicht eine Korrelation zwischen periodischen Druckschwankungen erhalten. Dies ist der Fall da die Spektralkoeffizienten des überlagerten Trends um Vieles grösser sind als diejenigen der periodischen Druckschwankungen.

### 5.2.2. Möglichkeiten des Detrending

Es gibt unzählige Arten von Detrendings, die wir anwenden könnten. Eine einfache Methode ist sicher, wenn wir annehmen, dass der Druckabfall über eine gewissen Zeitspanne konstant ist. Dieses Phänomen kann z.B. beim Durchzug einer Warmfront beobachtet werden, da sich hier warme Luft über kältere dichtere Luft schiebt. Ein solcher Vorgang kann lange anhalten,

da eine Warmfront über tausend Kilometer lang sein kann. (A. Suter). Dabei darf das Intervall, über welches wir das Detrending vornehmen, nicht zu gross gewählt werden, da der Luftdruck in Wirklichkeit nicht konstant abnimmt. Der Zeitraum sollte aber auch nicht zu klein sein, da man in diesem Fall gesuchte Schwankungen durch ein Detrending eliminiert. Deshalb verwenden wir eine Zeitspanne von 3600s, d.h. sie ist grösser als die Dauer der Schwankungen mit Perioden von  $T < 1800s$ . Trotzdem kann es vorkommen, dass der Luftdruck sich sprunghaft ändert und so unser Detrendingverfahren nicht mehr optimal ist. Zum Glück sind solche Sprünge eher selten und fallen somit bei den Ergebnissen nicht stark ins Gewicht.

Eine gute Möglichkeit die Änderung des Druckes, in einem festgelegten Intervall zu bestimmen geschieht mit der „Methode der kleinsten quadratischen Abweichung“, mit der wir eine Gerade so durch die Koordinatenebene legen, dass die Abstände von den Punkten zu ihr einen Minimalwert annehmen. Als Ansatz nehmen wir  $S = \sum_{i=1}^N (y_i - m \cdot x_i - b)^2$  und  $0 = \frac{\partial S}{\partial m} = \frac{\partial S}{\partial b}$ . Nach m und n aufgelöst:

$$(Gl. 5.1 a) \quad m = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - y_q) \cdot (x_i - x_q)}{\sum_{i=1}^N (x_i - x_q)^2}$$

$$(Gl. 5.1 b) \quad b = y_q - m \cdot x_q$$

Die Herleitung ersparen wir uns, da die Gl. 5.1 a und b aus den meisten Formelsammlungen entnommen werden können. Dabei sind  $\bar{x}_q$  und  $\bar{y}_q$  die arithmetischen Mittel der Messwerte und N ist der Stichprobenumfang. Die Konstanten m und b sind Steigung bzw. Achsenabschnitt und ergeben die Gerade g:

$$(Gl. 5.1 c) \quad g: \quad f(x) = m \cdot x + b$$

(W.A. Stahel 2002).

Die erhaltene Gerade repräsentiert die kontinuierliche Luftdruckänderung und lässt sich vom Signal wegschubstrahieren.

Der Vorteil, wenn die Berechnung einer Geraden, die der kontinuierlichen Änderung des Luftdruckes entspricht, durch die Methode der kleinsten quadratischen Abweichung geschieht, besteht darin, dass die erhaltene Gerade (auch wenn  $\Delta t \gg T_{\text{Druckschwankung}}$  ist) immer noch dem tatsächlichen Trend sehr nahe kommt.

Die Methode der kleinsten Quadrate haben wir in Mathematica 4.1 programmiert. Im untenstehenden Auszug des Programms steht s für das Intervall  $\Delta t$  über welches die Methode der kleinsten Quadrate angewandt wird, in unserem Fall ist  $\Delta t = 3600s$ , der Parameter f steht für die Anzahl Intervalle, d gibt an auf wieviel Stellen gerundet werden soll und n entspricht der gewünschter Anzahl Spektralkoeffizienten.

Prog. 5.1

```

s ? 3600;
f ? 23;
d ? 100;
n ? 600;
Do {x1 ? } i ? 1} s ? 1;
  x2 ? s i;
  nx ? x2 ? x1 ? 1;
  b6 ? Table {List {k, b1} } k } , {k, x1, x2} } ;
  xq ? N {Sum {b6 } {k, 1} , {k, 1, nx} } nx ;
  yq ? N {Sum {b6 } {k, 2} , {k, 1, nx} } nx ;
  m ? N {Sum {b6 } {k, 2} ? yq } b6 } {k, 1} ? xq }
    , {k, 1, nx} } Sum {b6 } {k, 1} ? xq } ^ 2, {k, 1, nx} } } ;
  b ? N {yq ? m xq} ;
  y ? m x ? b;
  b5 ? Table {y, {x, x1, x2} } ;
  b4 ? Table {b6 } {k, 2} ? b5 } {k} , {k, 1, nx ? 1} } ;
  a1 ? b4;
  a2 ? N {Round Take Abs Fourier a1 } , n } d } d ;
  a3 ? Table {List {k ? 1, a2} } k } , {k, 1, n} } ;
  c ? N {Sort a3} } ;
  a } i } ? c,
  {i, 1, f} }
c ? {a } 1 } , a } 2 } , a } 3 } , a } 4 } , a } 5 } , a } 6 } , a } 7 } , a } 8 }
  , a } 9 } , a } 10 } , a } 11 } , a } 12 } , a } 13 } , a } 14 } , a } 15 }
  , a } 16 } , a } 17 } , a } 18 } , a } 19 } , a } 20 } , a } 21 } , a } 22 } , a } 23 } } ;
c1 ? Join c ;

```

Programm zur Detrending des Signals durch Subtraktion der Gerade bestimmt mittels der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung und anschliessende FFT.

### 5.3. Durchführung der Fourier-Analyse

Von der Differenz des Signals und der Geraden der kleinsten quadratischen Abweichung können wir nun eine Fourier-Analyse machen. Mit Mathematica 4.1 haben wir die Möglichkeit durch den Befehl `Fourier[List]` eine Fourier-Analyse einer beliebigen Liste zu machen, dabei versucht Mathematica das Verfahren automatisch zu vereinfachen indem es Symmetrien ( $N=2^m$ ) in der Liste erkennt und so, wenn möglich, eine FFT macht. Aus diesem Grund rechnet Mathematica mit komplexen Spektralkoeffizienten. Deshalb mussten wir, um anschaulichere Ergebnisse zu erhalten den Betrag von den Spektralkoeffizienten nehmen.

Die Programmierung ist im unteren Teil von Prog. 5.1 wiedergegeben. Als Output des Programms erhalten wir Listen von Spektralkoeffizienten für ein Zeitintervall von einer Stunde.



Alle auf diese Art errechneten Fourierkoeffizienten sind als Graphiken unter Daten aufgelistet.

#### 5.4. Approximation

Wenn wir die Graphen des Teiles „Daten“ vergleichen springt sofort ins Auge, dass die Funktionen annähernd hyperbelförmig verlaufen. Diese Eigenschaft könnte durch Luftdruckänderungen, die rein zufälliger Natur sind oder aber durch unsere gesuchten periodischen Druckschwankungen verursacht werden. Um dies zu überprüfen, müssen wir eine Approximation finden. Es ist nahe liegend, dass wir wieder mit der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine geeignete Approximation suchen.

Da die Graphen, wie gesagt, exponentiell verlaufen und scheinbar bei Null eine Definitionslücke besitzen wählen, wir für die Approximation den Ansatz:

$$(Gl. 5.2) \quad y' = a_0 + (a_1/x) + (a_2/x^2) + (a_3/x^3) + (a_4/x^4)$$

Nun können wir dies in die Ausgangsform der kleinsten quadratischen Abweichung einsetzen:

$$(Gl. 5.3) \quad S = \sum_{i=1}^N (y_i - y'_i)^2$$

$$(Gl. 5.4) \quad S = \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - (a_1/x) - (a_2/x^2) - (a_3/x^3) - (a_4/x^4))^2$$

Um das Minimum der quadratischen Abweichung zu erhalten müssen wir den Tiefpunkt der Funktion  $S(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$  bestimmen. Man erhält:

$$(Gl. 5.5 a)) \quad \frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - a_1/x - a_2/x^2 - a_3/x^3 - a_4/x^4) \cdot (-1) = 0$$

$$(Gl. 5.5 b)) \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - a_1/x - a_2/x^2 - a_3/x^3 - a_4/x^4) \cdot (-1/x) = 0$$

$$(Gl. 5.5 c)) \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - a_1/x - a_2/x^2 - a_3/x^3 - a_4/x^4) \cdot (-1/x^2) = 0$$

$$(Gl. 5.5 d)) \quad \frac{\partial S}{\partial a_3} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - a_1/x - a_2/x^2 - a_3/x^3 - a_4/x^4) \cdot (-1/x^3) = 0$$

$$(Gl. 5.5 d)) \quad \frac{\partial S}{\partial a_4} = 2 \sum_{i=1}^N (y_i - a_0 - a_1/x - a_2/x^2 - a_3/x^3 - a_4/x^4) \cdot (-1/x^4) = 0$$

Dies ergibt ein lineares Gleichungssystem mit fünf unbekanntem Parametern. Dieses können wir nicht ohne weiteres auflösen. Deshalb verwenden wir hierfür, die von Mathematica 4.1 zur Verfügung gestellte Funktion `Solve[{G1, G2,...}, {a1, a2,...}]`, welche ein System mit beliebig vielen Variablen auflösen kann. In Mathematica geschrieben lautet dies:

Prog. 5.2

`h? 60;`

`q1? 5;`

`q2? 10;`

```

c2? Drop}Take}c1, q2}, q1};
Do}a}i} ? List}i, Sum}c2}}k, i, 2}}, }k, 1, q2? q1}}}, }i, 1, 180}}
c3? }a}1}, }a}2}, }a}3}, }a}4}, }a}5}, }a}6}, ..., }a}180}}};
ListPlot}c3, PlotJoined? True, PlotRange? }}0, h}, }0, 8}},
  AxesLabel?
    }"f }1}h", "I"}, Ticks? }Table}k, }k, 0, 60, 2}}, Automatic}
  , PlotStyle? }RGBColor}0, 0, 1}},
  TextStyle? }FontFamily? Times
    , FontSize? 10}, ImageSize? }500, 300}}};

```

`c11? c3;`

`a?.`

`b?.`

`c?.`

`d?.`

`e?.`

`c12?`

```

N}
Sum}
  }c11}}k, 2}} ? a } c11}}k, 1}} ? b? c } }c11}}k, 1}}}}^2
  ? d } }c11}}k, 1}}}}^3? e } }c11}}k, 1}}}}^4} 1 } c11}}k, 1}}
  , }k, 2, 180}}};
  c13?

```

```

N}
Sum} }c11}}k, 2}} ? a } c11}}k, 1}} ? b? c } }c11}}k, 1}}}}^2
  ? d } }c11}}k, 1}}}}^3? e } }c11}}k, 1}}}}^4}, }k, 2, 180}}};

```

```

c14?
N}
Sum}
{c11}k, 2} ? a {c11}k, 1} ? b? c {c11}k, 1}^2}
  ? d {c11}k, 1}^3? e {c11}k, 1}^4} 1 {c11}k, 1}^2}
, {k, 2, 180}};
c18?
N}
Sum}
{c11}k, 2} ? a {c11}k, 1} ? b? c {c11}k, 1}^2}
  ? d {c11}k, 1}^3? e {c11}k, 1}^4} 1 {c11}k, 1}^3}
, {k, 2, 180}};
c19?
N}
Sum}
{c11}k, 2} ? a {c11}k, 1} ? b? c {c11}k, 1}^2}
  ? d {c11}k, 1}^3? e {c11}k, 1}^4} 1 {c11}k, 1}^4}
, {k, 2, 180}};
c15? Solve {c12? 0, c13? 0, c14? 0, c18? 0, c19? 0}
, {a, b, c, d, e}};
y? c15}{1, 1, 2}} x? c15}{1, 2, 2}} ? c15}{1, 3, 2}} x^2? c15}{1, 4, 2}}
{x^3? c15}{1, 5, 2}} x^4
c16? Table {y, {x, 1, 180}};
c17? Table {c3}{k, 2}} ? c16}{k}}, {k, 1, 180}};
ListPlot {Drop {c17, 1}, PlotJoined? True,
PlotRange? {0, h}, {0.75, 0.75}}
, AxesLabel? {"f {1}h", "I"}, AxesOrigin? {0, 0},
GridLines?
{Table}k
, {k, 0, 60, 2}}
, Table {k, {k, ?0.8, 0.8, 0.1}}},
Ticks? {Table}k, {k, 0, 60, 2}}
, Automatic
, PlotStyle? {RGBColor}0, 0, 1}},
TextStyle? {FontFamily? Times
, FontSize? 10}
, ImageSize? {500, 300}}

```

Der obere Teil berechnet die Approximation und ist als Schlaufe geschrieben. Die Approximation hat die Form  $y' = a_0 + a_1/x + a_2/x^2 + a_3/x^3 + a_4/x^4$  und wird im Programm als y bezeichnet. c17 steht hier für die Differenz zwischen den Fourierkoeffizienten und der Approximation.

5.5. Differenz von FFT und Approximation

Es wäre durchaus möglich, dass die von uns berechnete Approximation eine Störung repräsentiert, welche die periodischen Luftdruckschwankungen überlagert. Um dies herauszufinden, müssen wir jeden Spektralkoeffizient vom Wert der Approximation bei der betreffenden Stelle subtrahieren. So erhalten wir geglättete Werte, die wir im folgenden Kapitel diskutieren werden.

Dieser Befehl ist unter Prog. 5.2 für Mathematica wiedergegeben.

## 6. Resultate

### 6.1. Differenz von Spektralkoeffizienten und Approximation

Nun überprüfen wir ob die Differenz von Spektralkoeffizienten und Approximation rein zufällig zustande kam oder ob sie von der vorherrschenden Wetterlage abhängt. Würde sich im Folgenden keine Korrelation ergeben, müssten wir davon ausgehen, dass es sich bei diesen Schwankungen nur um ein Rauschen handelt, dass durch Ungenauigkeiten des Messgerätes, turbulente Strömungen an Hindernissen oder bei der Fourier-Transformation entstand. Auch, wenn wir periodische Druckschwankungen finden, müssen wir uns immer vor Augen halten, dass diese einem Rauschen, dass sehr stark sein kann, überlagert sind. Alle Wetterlagen werden wir durch Wetterkarten aus der NZZ (siehe Daten) bzw. von MeteoSchweiz (SMA), und Windgeschwindigkeit und -richtung (10 min Mittel) grob charakterisieren. Die Windgeschwindigkeit ist ein gutes Mass für die Stärke von Druckschwankungen und wird bei unseren Korrelationsanalysen ein tragendes Element sein. Zusätzlich steht uns von SMA in Zürich Sonnenscheindauer, Wolkenart, Böenspitzen und Temperatur (10 min Mittel) zur Verfügung. Da eine Auswertung mittels diesen Klimaelementen sehr aufwendig ist, betrachten wir sie nur in unklaren Situationen oder, wenn ein Ausreisser vorliegt. Zur Bestimmung des Temperaturgradienten und indirekten Erkennung von Inversionslage haben wir zusätzlich noch die Temperaturwerte vom Hörnli von SMA zur Verfügung.

#### 6.1.1. Rangkorrelation

Es stellt sich nun die Frage, wie wir ein Mass für die Intensität der Luftdruckschwankungen finden können. Dies wird dadurch erschwert, dass ein sehr starkes Rauschen vorhanden ist und die Frequenzen der Druckschwankungen sich mit der Zeit verändern. Eine grobe aber gute Möglichkeit wäre, wenn wir den Centroid X bestimmen. Dies ist ein schnelles Verfahren. Da wir davon ausgehen, dass die Spektralkoeffizienten in einem bestimmten Bereich direkt von der Windstärke abhängen, wenn Grenzschichtwellen vorhanden sind, sollte dieses Verfahren zum Ziel führen. Es ist also der Centroid X:

$$(Gl. 6.1.) \quad X = \frac{\sum_n (f_n \cdot I_n)}{\sum_n I_n}$$

Wobei f die Frequenz und I die Intensität ist. Dabei ist zu beachten dass  $I = \text{Abs}(c_f)$  ist. Dies wird in Mathematica wie folgt geschrieben:

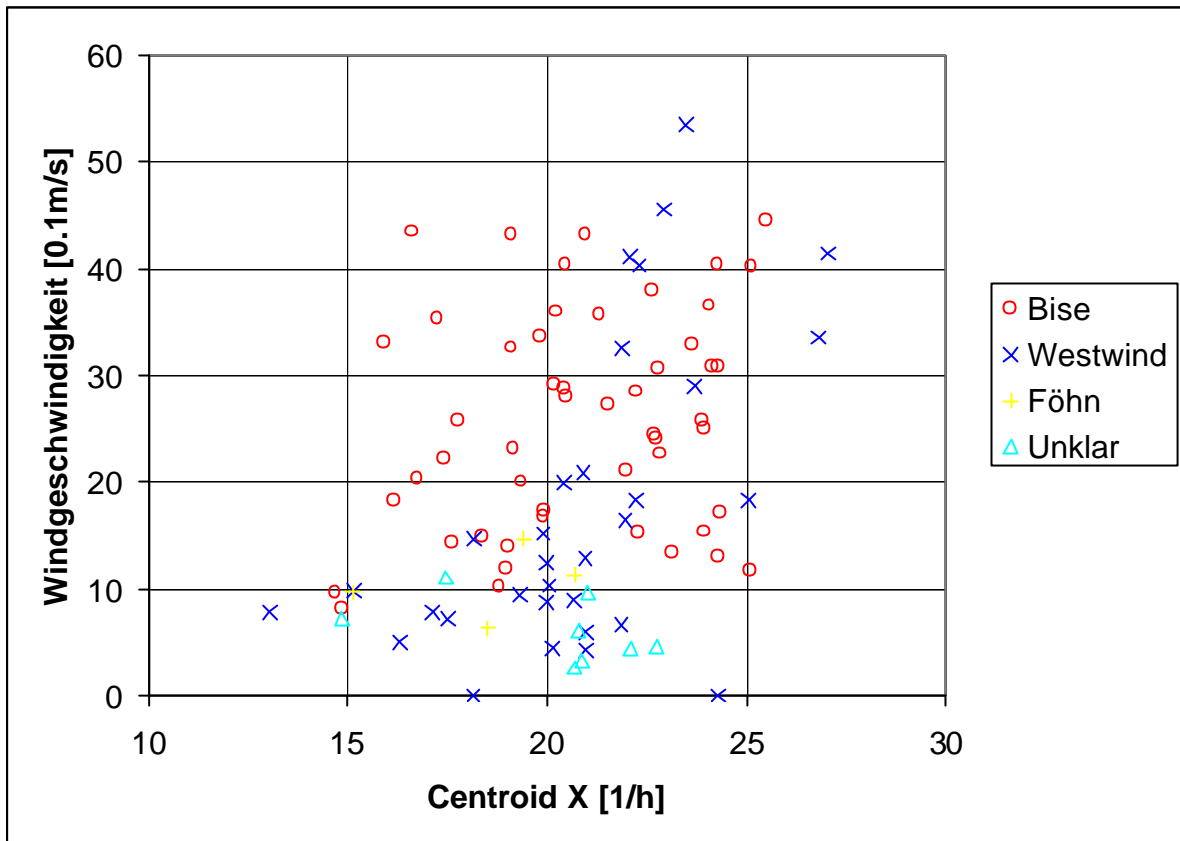
Prog. 6.1.

```
c18 ? Take {Drop {c17, 1}, 58};
c19 ? Table {List {k? 2, c18} {k}, {k, 1, 58}};
c20 ? Sum {c19} {k, 1} {Abs {c19} {k, 2}}, {k, 1, 57}}
{Sum {Abs {c19} {k, 2}}, {k, 1, 57}}
```

Ausschnitt aus einem Programm zur Berechnung von X. Weiter oben im Programm ist c17 die Differenz von Spektralkoeffizienten und Approximation.

Wir führten dies mit allen Messungen durch und haben die Werte im untenstehenden Diagrammen gegen die Durchschnittsgeschwindigkeit des Windes aufgetragen (Abb. 5.1).

Abb. 6.1

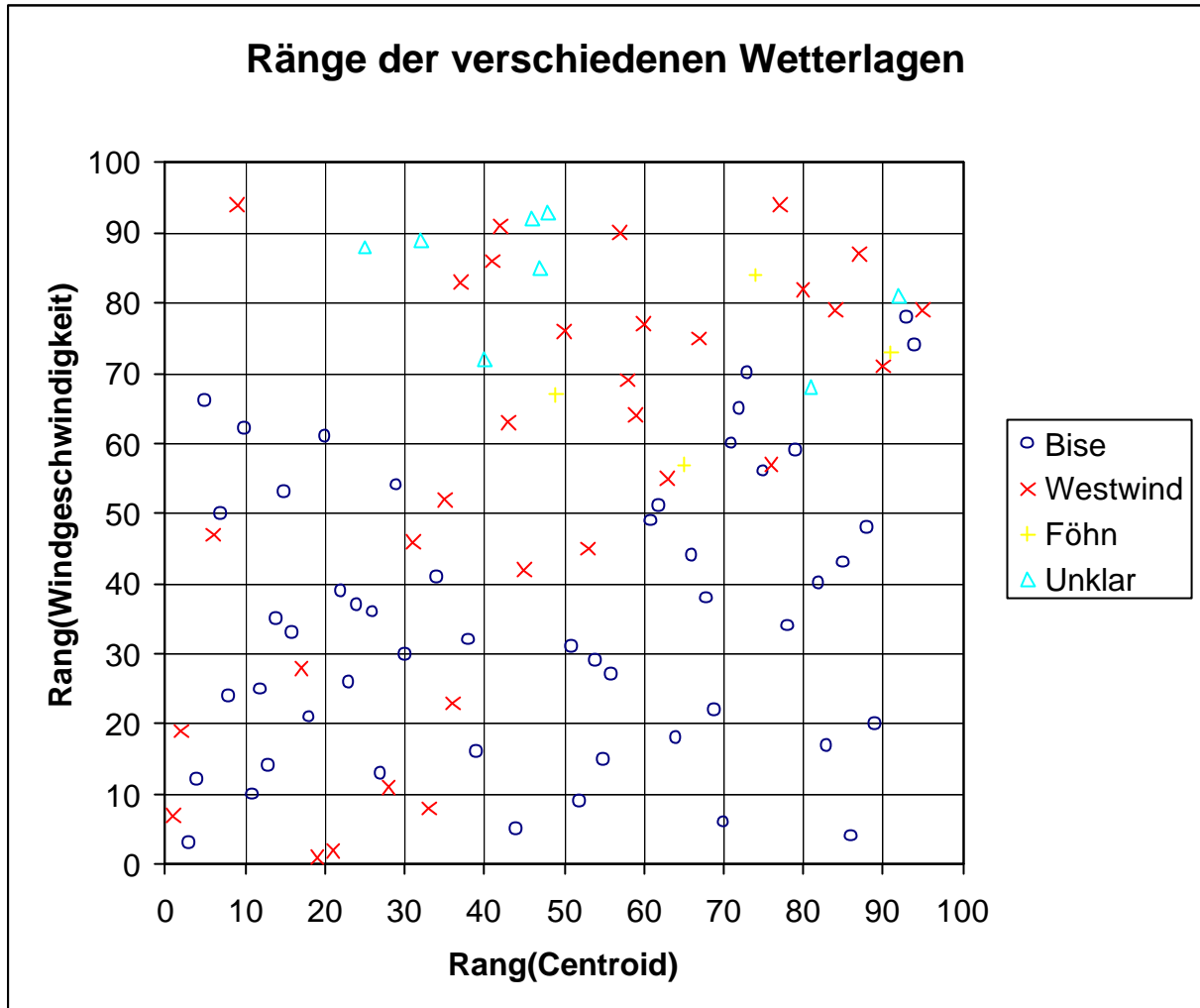


Im Diagramm ist der Centroid  $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_n \cdot I_n)$  gegen die Windgeschwindigkeit  $[0.1 \text{ m s}^{-1}]$  aufgetragen.

Wenn wir Abb. 6.1 betrachten, scheint es als ob die Werte bei Bisenlage rein zufällig gestreut wären, doch bei den Westwinden können wir eine Struktur vermuten. Um dies zu überprüfen, machen wir am besten eine Rangverteilung und stellen diese in einer neuen Graphik dar. Wenn die Punkte nun in der Nähe der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten  $g_1: y=x$  oder der Geraden  $g_2: y=-x+M$  ( $M$ =Anzahl der Ränge) liegen, dann besteht eine Korrelation zwischen Windgeschwindigkeit bei einer Wetterlage und dem Centroid.

Betrachten wir das obenstehende Diagramm, so stellen wir fest, dass die Punkte für Bise wahrscheinlich rein zufällig gestreut sind, hingegen liegt die Vermutung nahe, dass die Punkte für Westwind um eine Gerade gestreut sind mit  $g: y=x$ , was einen Zusammenhang nahe legt. Die beiden Wetterlagen (Bise/Westwind) sind in Abb. 6.3 a und b noch einmal einzeln wieder gegeben.

Abb. 6.2



Rangverteilung der Centroids  $Rang(X) = \sum_n (f_n \cdot I_n) / \sum_n (f_n)$  und der Windgeschwindigkeiten.

Abb. 6.3 a)

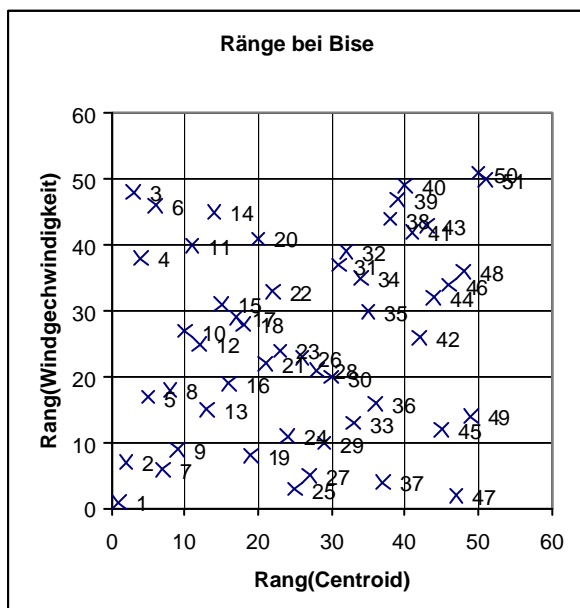
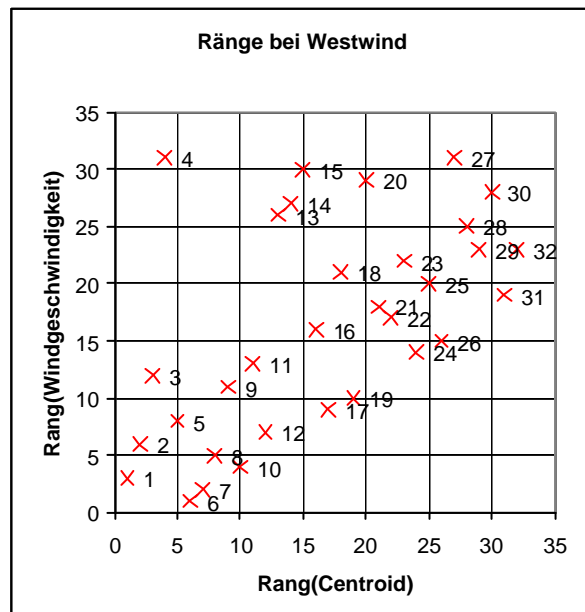


Abb. 6.3 b)



## Kurzperiodische Luftdruckschwankungen im Zusammenhang mit Grosswetterlagen

### Uhrzeiten zu Abbildung 6.3 a)

1	18.12. _ 10:00-15:00	27	09/10.12. – 19:54-00:54
2	18.12. _ 05:00-10:00	28	08.01. _ 09:06-14:06
3	16.01. _ 12:31-17:31	29	10.12. _ 00:54-05:54
4	08.12. _ 00:17-05:17	30	07/08.01. _ 23:06-04:06
5	09/10.01. _ 23:39-04:39	31	05.01. _ 12:27-17:27
6	24.01. _ 06:31-11:31	32	05/06.01 _ 23:27-04:27
7	08/09.12. _ 19:21-00:17	33	17.12. _ 19:00:24:00
8	11/12.01. _ 22:27-03:27	34	11.12. _ 09:42-14:42
9	07.01. _ 18:06-23:06	35	06/07.01. _ 23:19-04:19
10	07.01. _ 04:19-09:19	36	17/18.12. _ 24:00-05:00
11	17.12. _ 11:06-16:06	37	09.12. _ 05:21-10:21
12	07.01. _ 09:19-14:19	38	16.01. _ 17:33-22:33
13	11.01. _ 17:27-22:27	39	12.12. _ 11:14-16:14
14	11.12. _ 04:42-09:42	40	05.01. _ 17:27-23:27
15	06.01. _ 18:19-23:19	41	07/08.12. _ 19:13-00:13
16	09.12. _ 00:21-05:21	42	10.01. _ 04:39-09:39
17	08.12. _ 10:17-15:17	43	12/13.01 _ 20:58-01:58
18	08.01. _ 04:06-09:06	44	10.12. _ 18:42- 23:42
19	10.01. _ 14:39-19:39	45	09.01. _ 18:39-23:39
20	06.01. _ 04:27-09:27	46	10/11.12. _ 23:42-04:42
21	24.01. _ 11:31-16:31	47	10.12. _ 05:54-10:54
22	08.12. _ 05:17-10:17	48	11/12.12. _ 20:14-01:14
23	12.01. _ 03:27-08:27	49	10.12 _ 10:54-15:54
24	10.01. _ 09:39-14:39	50	12.12. _ 06:14-11:14
25	09.12. _ 10:21-15:21	51	12.12. _ 01:14-06:14
26	16/17.01. _ 22:33-03:33		

### Uhrzeiten für Abbildung 6.3 b)

1	23.01. 00:30-05:30	17	17.01. _ 05:33-10:33
2	16/17.12. _ 20:06-01:06	18	24.01. _ 01:31-06:31
3	23/24.01. _ 20:31-01:31	19	19.01. _ 18:55-23:55
4	14.12. _ 03:35-08:35	20	12/13.01 _ 20:58-01:58
5	17.12. _ 01:06-06:06	21	16.01. _ 02:31.07:31
6	22/23.01. _ 19:30-00:30	22	15/16.01. _ 21:31-02:31
7	22.01. _ 14:30-19:30	23	17.12. _ 06:06-11:06
8	22.01. _ 07:34-12:34	24	13.01. _ 01:58-06:58
9	13.01. _ 06:58-11:58	25	16.01. _ 07:31-12:31
10	22.01. _ 02:34-07:34	26	19/20.01. _ 23:55-04:55
11	13.12. _ 17:35-22:35	27	14.12. _ 08:35-11:35
12	23.01. _ 05:30-10:30	28	13/14.12. _ 22:35-03:35
13	17/18.01. _ 23:06-04:06	29	18.01. _ 09:06-14:06
14	17.01. _ 18:06-23:06	30	20.01. _ 04:55-09:55
15	18.01. _ 04:06-09:06	31	21.01. _ 07:41-12:41
16	17.01. _ 03:33-05:33	32	21.01. 02:41-07:41

*Auf den ersten Blick scheint es, als ob bei Bisenlage ein recht schwacher Zusammenhang zwischen dem Durchschnitt  $X$  und der Windgeschwindigkeit besteht, was aber auch zufällig sein kann(4.3 a). Hingegen scheint eine Korrelation der beiden Grössen bei Westwind vorzuliegen (4.3 b).*

Um unser Verfahren mit Centroids  $X$  zu überprüfen, können wir ein zweites ähnliches Verfahren durchführen und die Ergebnisse anschliessend vergleichen. Unsere zweite Methode

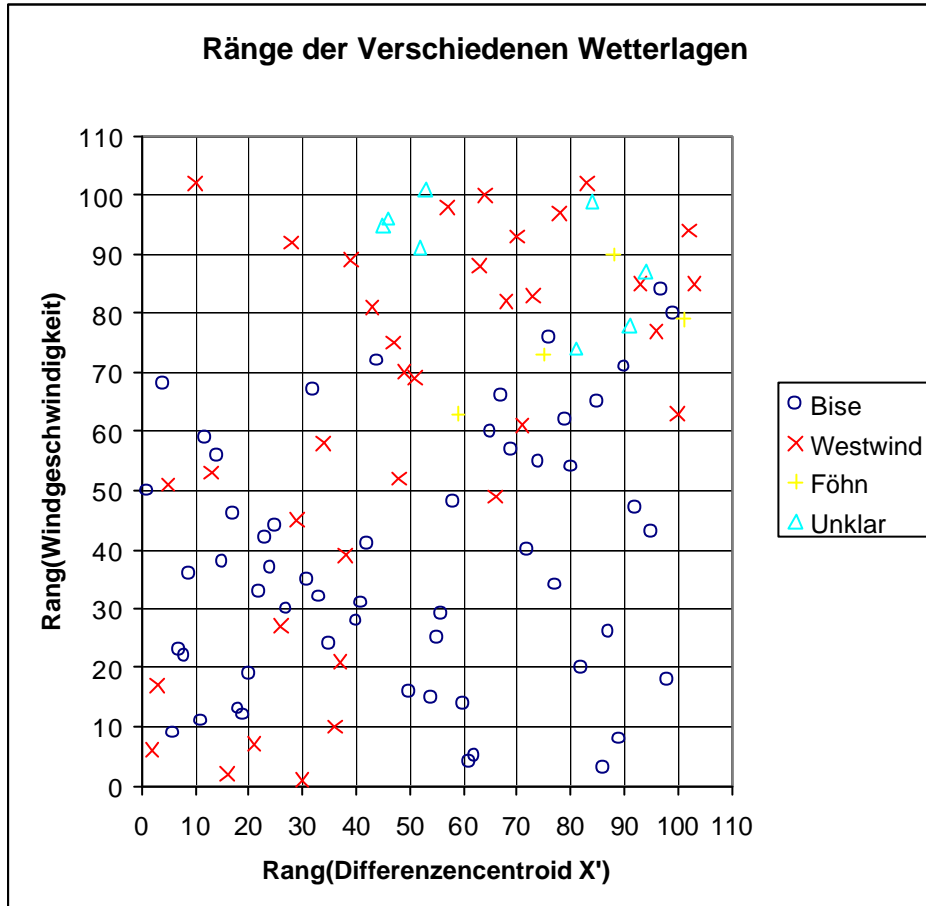


beruht darauf, dass wir von zwei aufeinander folgenden Spektralkoeffizienten den Betrag der Differenz nehmen und ähnlich wie oben das Centroid berechnen. Wir erhalten also:

$$(Gl. 6.2) \quad X' = \frac{\sum_n (f_n \cdot \text{Abs}(I_n - I_{n+1}))}{\sum_n (\text{Abs}(I_n - I_{n+1}))}$$

Auf diese Art können wir ein Centroid von der Stärke der Differenz aufeinander folgender Spektralkoeffizienten berechnen.

Abb. 6.4

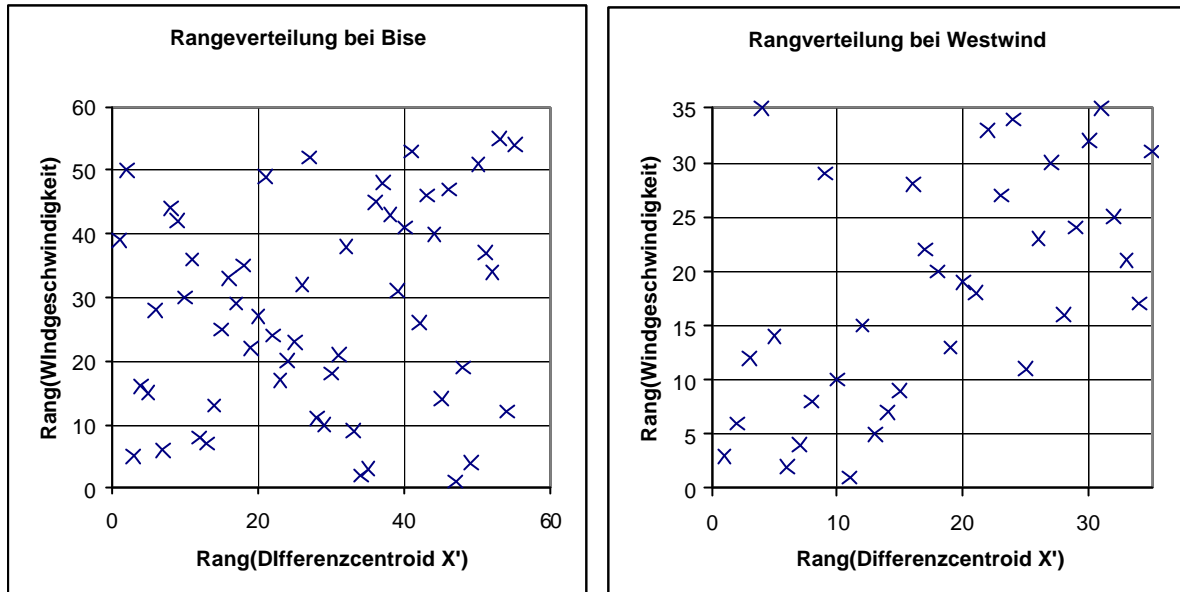


In dem Diagramm sind die Ränge der Centroids der Differenz auseinanderfolgender Spektralkoeffizienten  $X' = \frac{\sum_n (f_n \cdot \text{Abs}(I_n - I_{n+1}))}{\sum_n (\text{Abs}(I_n - I_{n+1}))}$  gegen die Ränge der Windgeschwindigkeiten aufgetragen.

Da kein Name für diesen Wert besteht nennen wir ihn Differenzcentroid.

Dies ergibt uns Abb. 6.4 mit beiden Wetterlagen in einer Graphik. In Abb. 6.5 sind Bisen- und Westwindlage auf zwei Graphiken aufgetrennt.

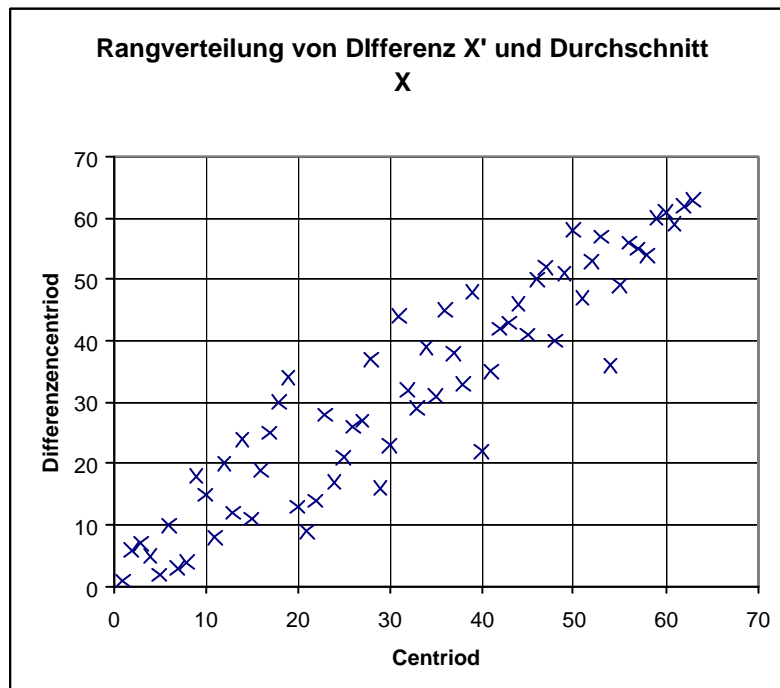
Abb. 6.5



Hier sind die Rangverteilungen bei Bise und Westwind wiedergegeben. Es sind die Ränge der Centroids der Differenz aufeinanderfolgender Spektralkoeffizienten  $X' = \frac{f_n \cdot \text{Abs}(I_n - I_{n+1})}{\sum_n \text{Abs}(I_n - I_{n+1})}$  in Abhängigkeit von Rängen der Windgeschwindigkeiten wiedergegeben.

Auf den ersten Blick sieht es aus, als ob die Differenzcentroids  $X'$  und der Centroids  $X$  wirklich denselben Sachverhalt beschreiben würden.

Abb. 6.6



Die Graphik gibt als Rangverteilung den Zusammenhang von der Differenz  $X'$  und dem Durchschnitt  $X$  wieder.

Um dies genau zu prüfen, führen wir eine Spearmansche Rangkorrelation von den Centroids  $X$  und den Differenzcentroids  $X'$  durch.

Dabei erkennen wir, dass alle Punkte ungefähr um die Winkelhalbierende gestreut sind. Dies bedeutet, je grösser der Differenzcentroid  $X'$  ist desto grösser wird das Centroid  $X$  (Abb. 6.6). Eine Spearmansche Rangkorrelation ergibt  $r_{XY}=0.931$ .

Wir führen nun eine Spearmansche Rangkorrelation durch und prüfen damit wie stark der Centroid  $X$  und die Windgeschwindigkeit zusammenhängen.

Wenn wir dies nun für die Centroiden  $X$  und Windgeschwindigkeiten bei Westwindlage durchführen, erhalten wir eine Korrelation von  $r_{XY}=0.572$  und für die Differenzcentroide  $X'$  und die Windgeschwindigkeiten den Wert  $r_{XY}=0.575$ . Dies weist schon auf eine gewisse Korrelation hin, doch weicht es noch stark von dem Idealwert 1 ab. Dies ist aber nicht verwunderlich, da wir davon ausgehen müssen, dass nicht bei allen Messungen wirklich Grenzschichtwellen auftraten, welche periodische Luftdruckschwankungen verursachten. Sicherlich war auch die Beurteilung der Wetterlagen sehr schwer, was zu möglichen Ausreissern führen konnte. Um Ausreisser aufzuspüren, werden all diejenigen Punkte die eine quadratische Abweichung von 100 oder mehr besitzen herausgesucht (d.h.  $(\text{Rang}(X) - \text{Rang}(v_w))^2 > 100$ ). Dann erhalten wir folgende Daten, welche den Grenzwert überschreiten (Tab. 6.1):

Tab. 6.1

Nummer:	Datum:	Quadratisch Abweichung:
4	14.12. _ 03:35-08:35	729
13	17/18.01. _ 23:06-04:06	169
14	17.01. _ 18:06-23:06	169
15	18.01. _ 04:06-09:06	225
24	13.01. _ 01:58-06:58	100
26	19/20.01. _ 23:55-04:55	121
31	21.01. _ 07:41-12:41	144

*Messungen zu Westwindlagen mit quadratischen Abweichungen von grösser gleich 100.*

Wenn wir die Wolkenarten von 14.12.02 während der Zeitspanne, in welcher die Messung aufgenommen wurde, betrachten, erkennen wir am Abend zuvor einen Aufzug von Cirruswolken und am nächsten Morgen, um 11 Uhr, war der Himmel vollständig mit Stratuswolken bedeckt, was darauf hindeutet, dass wir am Anfang vom Durchzug einer Warmfront waren. Die anschliessende Messung (Punkt 27 in Abb. 6.3 b) ist dagegen sehr nahe an der theoretischen Geraden.

Die Punkte 13, 14 und 15 können wir, da sie aufeinander folgen, gleich zusammengefasst (17/18.01.03 \_ 18:06-09:06) behandeln. Anhand der Isobarenkarten (siehe Daten) sehen wir, dass hier eine äusserst flache Druckverteilung herrschte und so keine wirklichen Winde wehten, geschweige denn eine Zyklone im Durchzug war.

Die Messung vom 13.01 war ebenfalls eine Wetterlage mit relativ wenig Wind. Zürich war hier im Einfluss einer stark ausgeprägten Antizyklone, was zur Folge hatte, dass alle Störungen nördlich der Schweiz vorbei zogen.

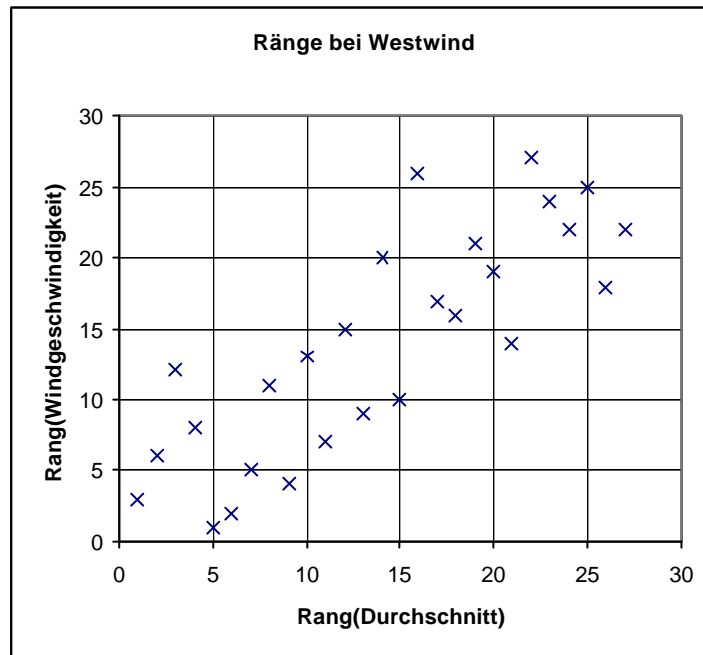
Auf der Isobarenkarte des 19.01.03 13 Uhr sehen wir eine Okklusion, die Zürich schätzungsweise um Mitternacht passierte. Ebenfalls zeigen uns Daten von MeteoSchweiz, dass am 19.01 17:40 Stratuscumulus den Himmel zu 3/8 und am 20.01 05:40 1/8 des Himmels mit Altocumulus bedeckten. Das legt den Schluss nahe, dass am 19/20.01.03 von 23:55-04:55 wirklich eine Okklusion vorlag. Wir können also die Messung nicht aufgrund einer untypischen Wetterlage verwerfen.

Wir können in der Messung des 21.01.03 von 07:41 bis 12:41 anhand der Wolken-Klassifizierung und der Windrichtung feststellen, dass der Wind aus Norden kam, und, dass wir Stratus- und Altocumuluswolken über Zürich hatten. Zudem sehen wir, dass sich eine

schwache Föhnlage aufbaute. Dabei können wir aber nicht mit Sicherheit sagen, ob wir nicht schon in höheren Schichten eine Südföhnströmung hatten und wir sie lediglich, weil wir in einem Kaltluftsee lagen, nicht registrieren konnten.

Wenn wir nun diejenigen Messungen, die wir aufgrund von Wetterlagen als Ausreisser deklarieren (4, 13, 14, 15 und 24) aus unserer Liste herausstreichen und noch einmal eine Spearman'sche Rangkorrelation durchführen, erhalten wir eine Korrelation  $r_{XY}=0.895$ , was doch ein ganz guter Wert ist. Dieser Korrelationskoeffizient liegt ausserhalb der Irrtumswahrscheinlichkeit (95%) und ist statistisch gesichert. Dies ist in Abb. 6.7 als Rangverteilung dargestellt.

Abb. 6.7



*Es sind die Ränge der Durchschnitte  $Rang(X)=?_n (f_n \cdot I_n)/? (I_n)$  und die Ränge der Windgeschwindigkeiten gegeneinander aufgetragen.*

Es wäre relativ einleuchtend, dass diese kurzperiodischen Druckschwankungen bei Westwind eine Ursache von Grenzschichtwellen bei Warmfronten sind. Dies kann aber im Rahmen unserer Arbeit, den uns zur Verfügung stehenden technischen Mitteln und dem Zeitaufwand nicht mit Sicherheit gesagt werden. Wir können also nicht sicher sagen, von wo diese Druckschwankungen herrühren. Aber, da es eine bekannte Tatsache ist, dass Grenzschichtwellen an Warmfronten entstehen (K. Burri 1998), ist dies wohl die plausibelste Erklärung.

Wir überprüfen nun, ob bei Bisenlage ein Zusammenhang zwischen der Windgeschwindigkeit und dem Centroid X besteht. Wenn wir Abb. 6.3 a) betrachten hat es den Anschein als ob die Punkte rein zufällig gestreut wären. Um dies zu prüfen, ist es am leichtesten eine Spearman'sche Rangkorrelation zu machen. Wir erhalten für  $r_{XY}=0.214$ , was uns zu der Annahme führt, dass unter Umständen keine periodischen Druckschwankungen bei Bise auftreten. Wir können alle Punkte mit einer quadratischen Abweichung grösser oder gleich 100 mit jenen vergleichen, deren quadratische Abweichung kleiner als 100 ist. Dabei schauen wir, bei welchen Wetterlagen, möglicherweise Grenzschichtwellen entstehen können. Eine Voraussetzung für Grenzschichtwellen bei Bise ist, dass sich eine Inversion bildet. Da wir leider über kein Temperatur- und Windprofil verfügen, weil es keine Sondierung im Grossraum Zürich gibt (nächste gelegene Station ist in Payern), müssen wir andere

Klimaelemente zur Hilfe ziehen. Wir verwenden hierzu die Sonnenscheindauer als Mass für die Bewölkung, denn bei Inversion bildet sich in der Regel eine Wolkendecke an der Grenzschicht. Die Temperatur gibt uns zusätzlich Auskunft über eine Inversionslage.

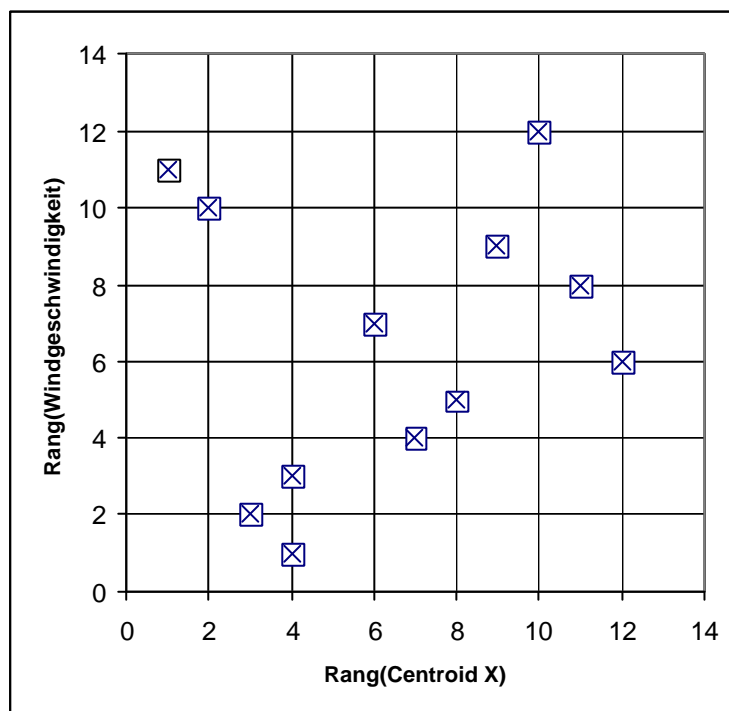
An Hand der Messdaten von MeteoSchweiz konnten wir feststellen, dass während folgenden Tagen die Wolkendecke teilweise oder völlig aufriss:

18.12. \_ 10:00-15:00 / 18.12. \_ 05:00-10:00 / 07.01. \_ 04:19-09:19 / 07.01. \_ 09:19-14:19 / 09.12. \_ 10:21-15:21 / 08.01. \_ 09:06-14:06 / 10.12. \_ 05:54-10:54 / 10.12. \_ 10:54-15:54

Wenn wir diese Werte nun aus der Wertemenge entfernen und von der neuen Menge  $V$  nochmals eine Spearman'sche Rangkorrelation durchführen, erhalten wir  $r_{XY}=0.219$ , was dem vorhergehenden Wert sehr nahe kommt und eine kleine Korrelation bedeutet.

Wenn wir die Temperaturen von Hörnli mit der theoretisch berechneten potentiellen Temperatur vergleichen, können wir so feststellen ob zu einem gewissen Zeitpunkt eine Inversion vorlag. Mit diesem Verfahren können wir sagen, dass es am 09.12. \_ 19:54-12.12. \_ 16:14 / 16.01. \_ 17:33-17.01. \_ 03:33 zu Inversionslagen kam. Wenn wir nun eine Spearman'sche Rangkorrelation dieser Tage durchführen, erhalten wir  $r_{XY}=0.468$ , was etwas zu tief ist um einen Zusammenhang nachzuweisen (Abb. 6.8). Diese für die Bise erhaltenen Korrelationskoeffizienten sind statistisch nicht gesichert.

Abb. 6.8.



*Die Ränge der Durchschnitte  $Rang(X)=\sum_n (f_n \cdot I_n) / \sum_n I_n$  und die Ränge der Windgeschwindigkeiten gegeneinander aufgetragen. Dabei wurden nur Tage berücksichtigt, bei welchen mittels Temperaturgradienten gesagt werden konnte, dass eine Inversionslage vorhanden war.*

Wir haben nun Korrelationsanalysen zur Bisenlage mittels Centroid X bzw. Differenzcentroid X' und der Windgeschwindigkeit  $v_w$  gemacht und dabei keinen statistisch gesicherten Zusammenhänge feststellen können. Ich persönlich gehe aber davon aus, dass es durchaus kurzperiodische Druckschwankungen gab, wir sie aber mit unseren Instrumenten nicht präzise genug registrieren konnten oder die günstigen Lagen, bei welchen sich Grenzschichtwellen bildeten in der Unterzahl waren. Um dies zu überprüfen bräuchten wir genauere Messinstrumente und Temperaturprofile.

6.2. Bemerkung zu Approximation von den Spektralkoeffizienten

Ein weiteres Merkmal des Spektralkoeffizienten, welches sofort ins Auge sticht, ist die Approximation (siehe 6.3). Im Folgenden werden wir nun prüfen, ob ihre Form bestimmten Wetterlagen zu Grunde liegt oder ob sie lediglich ein Überbleibsel darstellt, das bei dem vorangegangenen Detrending nicht eliminiert wurde. Hierfür verwenden wir die im Teil „Daten“ festgehaltenen Koeffizienten.

6.2.1. Approximation der Spektralkoeffizienten

Vergegenwärtigen wir uns die unter 6.5 Gl. 6.3 erhaltene Form für die Approximation noch einmal:

$$y_{ap}=a_0+a_1/x+a_2/x^2+a_3/x^3+a_4/x^4$$

Als erstes überprüfen wir ob die Approximation einen Trend, der bei dem Detrending erhalten blieb, wiedergibt oder ob sie einem anderen Phänomen folgt. Hierzu schauen wir, ob die Form der Approximation an derjenigen Funktion, die man durch die FFT einer Geraden erhält, erinnert. Die FFT einer Geraden hat die Form:

$$G: y=2/(Pi n)$$

Was bei unseren Messungen jedoch nicht der Fall zu sein scheint.

Wir können aber nicht sagen ob die Näherungen nicht durch eine andere unperiodische Überlagerung verursacht wurde. Dies herauszufinden wäre sehr aufwändig und müsste für jede Messung einzeln durchgeführt werden. Es ist deshalb sinnvoller mit einem Test zu überprüfen ob die Approximationen der Messungen rein zufällig entstanden.

Nun können wir überprüfen ob die Approximation von den Wetterlagen abhängig ist oder nicht. Zu diesem Zweck bilden wir Vektoren **r** im Hyperraum wie folgt:

$$\mathbf{r}_k = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad k? \{ \text{Westwind, Bise, Föhn, unklar} \}$$

Wobei a0 bis a4 die Summen aller Koeffizienten der Approximation darstellt.

$$\mathbf{r}_{\text{Bise}} = \begin{bmatrix} 2.283 \\ -4245 \\ 1759 \\ 804 \\ 249.7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{\text{Westwind}} = \begin{bmatrix} 0.884 \\ -2705 \\ 1766 \\ 547.9 \\ 398.8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{\text{Föhn}} = \begin{bmatrix} 0.069 \\ -1568 \\ 669.2 \\ 143.8 \\ 22.93 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_{\text{unklar}} = \begin{bmatrix} -0.171 \\ -1754 \\ 972.9 \\ 86.08 \\ 62.57 \end{bmatrix}$$

Als nächstes bilden wir das Skalarprodukt  $S_{\text{skal}}$  und nehmen es als Mass für den Zusammenhang zwischen  $\mathbf{r}_k$  und  $\mathbf{r}_n$  (bei einer Korrelation ist  $\text{Abs}(S_{\text{skal}}) \approx 1$  d.h. die Vektoren sind kollinear). Dies lautet wie folgt:

$$S_{\text{skal}} = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_n / (\text{Abs}(\mathbf{r}_k) \text{ Abs}(\mathbf{r}_n))$$

Wir erhalten für das Skalarprodukt die untenstehenden Werte:

Tab. 6.2

	B	W	F	-	
B	1	0.981	0.995	0.985	Korrelation von den Koeffizienten der Approximation mittels Skalarprodukt ( $\text{Abs}(S_{\text{skal}}) \approx 1$ bedeutet einen hohen Zusammenhang). F steht für Föhn-, B für Bisen- und W für Westwindlage, (-) ist für den Fall, dass eine andere Wetterlage vorliegt oder, dass sie sich nicht zuordnen lässt.
W	0.981	1	0.976	0.994	
F	0.995	0.976	1	0.986	
-	0.985	0.994	0.986	1	

Wie wir in Tab. 6.2 sehen, sind die Koeffizienten der Approximation nicht von der Wetterlage abhängig, denn  $\text{Abs}(S_{\text{skal}})$  ist in guter Näherung 1. Dies ist ein Indiz dafür, dass die Näherung nicht durch die Bildung von Grenzschichtenwellen entstand.

Es ist aber immer noch nicht klar ob diese Funktion Verwirbelungen infolge von turbulenter Strömung oder bei der Transformation des Signals entstand. Wir können dies herausfinden, wenn wir eine Spearmansche Rangkorrelation von Windgeschwindigkeit und dem Durchschnitt der Koeffizienten machen. Wir erhalten  $r_{XY} = -0.021614$ , was man nun wirklich nicht als Zusammenhang bezeichnen kann. Wir müssen dabei erwähnen, dass wir, beim letzten Test, stillschweigend angenommen haben, dass sich die Frequenz der Druckschwankungen in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit verändert. Dies erscheint zwar logisch, beruht aber trotzdem nur auf einer Hypothese. Obwohl wir die Herkunft der Approximation nicht restlos geklärt haben, konnten wir immerhin zeigen, dass keine Korrelation zwischen ihr und der Windgeschwindigkeit besteht, was ja die eigentliche Fragestellung unserer Arbeit ist.

Nun klären wir ab, ob die Verteilung der Koeffizienten von der Windgeschwindigkeit abhängt oder ob sie auch frei variiert. Als Mass für die Verteilung nehmen wir die Varianz und führen

nochmals eine Spearmansche Rangkorrelation durch. Es ergibt sich eine Korrelationskoeffizient  $r_{XY}=-0.12396$ , d.h. zwischen Varianz und Windgeschwindigkeit besteht ebenfalls kein Zusammenhang.

Weil zwischen Windgeschwindigkeit und Koeffizienten der Approximation nach unserer Beurteilung kein Zusammenhang besteht, müssen wir davon ausgehen, dass die Approximation lediglich die Folge von einem Trend ist, der bei dem Detrending nicht eliminiert wurde, oder bei der vorgenommenen Transformation neu entstand.

Die Approximation ist also nach unserer Sicht nicht in Verbindung mit periodischen Luftdruckschwankungen zu bringen. In Anbetracht der obengenannten Belege muss die Hypothese, dass die Approximation durch kurzperiodische Druckschwankungen zustande kam, verworfen werden.



## 7. Zusammenfassung

Wir haben im Abschnitt Theorie die schon bekannte Erklärung über die Entstehung von kurzperiodischen Luftdruckschwankungen wiedergegeben und unsere Hypothese eingeführt. Im darauffolgenden sprachen wir über unser Verfahren und erklärten die Notwendigkeit von Detrendings und stellten eine immer ähnlich verlaufende Form der Kurve fest, die wir durch eine Approximation wiedergaben.

Spätere Korrelationsanalysen mittels Skalarprodukt ergaben, dass weder die Durchschnitte der Koeffizienten der Approximation noch deren Varianz von der Wetterlage abhängen. Dies liess erst die Vermutung aufkommen, die Approximation entstünde durch turbulente Strömung am Relief oder an Verbauungen. Das stellte sich aber nach Überprüfung des Zusammenhanges zwischen Windgeschwindigkeit und Durchschnitten der Koeffizienten, anhand einer Spearmanschen Rangkorrelation, als eher unwahrscheinlich heraus. Was zum Schluss führt, dass die Approximation nicht periodischen Luftdruckänderungen zu Grunde liegt.

Als Mass für Druckschwankungen haben wir den Centroid der Spektralkoeffizienten verwendet. Um sicher zu gehen, dass diese Methode zuverlässig ist, bildeten wir den Centroid der Differenz aufeinanderfolgender Spektralkoeffizienten und konnten zeigen, dass diese beiden Werte hoch korrelativ sind.

Des Weiteren zeigten wir, dass bei Westwindlage die Windgeschwindigkeit in einem direkten Zusammenhang mit dem Centroid der Spektralkoeffizienten steht. Dies, so kamen wir zum Schluss, kann als Folge von Grenzschichtwellen an Fronten von Zyklonen gesehen werden, doch war es uns nicht möglich zu beweisen, dass diese speziellen Druckschwankungen nicht eine Folge von turbulenter Strömung am westlich gelegenen Höngerberg sind. Um unsere Messungen zu untermauern wäre eine zweite Messung im Grossraum Zürich notwendig.

Durch die Spearmansche Rangkorrelation, die wir zwischen den Centroids bei Bisenlage und den Windgeschwindigkeiten machten, stellten wir fest, dass lediglich eine Korrelation von  $r_{XY}=0.214$  besteht. Auch wenn wir nur Wetterlagen verwendeten, bei denen gesagt werden konnte, dass eine Inversion vorhanden war, verbesserte sich die Korrelation nicht. Da der Wert der Spearmansche Rangkorrelation zwischen Centroids der Bise und Windgeschwindigkeit 0.214 bzw. 0.468 beträgt, ist er zwar zu klein um eine Korrelation nachzuweisen aber andererseits gerade an der oberen Toleranzgrenze, bei der man mit Sicherheit von einer Unabhängigkeit sprechen kann. Es könnte ja sein, dass wir viele Ausreisser (z.B. eine Inversionsschicht konnte sich nicht ausbilden) mit berücksichtigt haben, welche das Resultat verfälschten. Mathematisch gesehen müssen wir zwar unsere Hypothese verwerfen, können aber nicht sicher sagen, ob doch unter speziellen Umständen kurzperiodische Druckschwankungen messbar wären.

Um die Hypothese, dass bei Bise Grenzschichtwellen auftreten können, eindeutig zu verwerfen, bedarf es einer zukünftigen Messung, in der eine relativ grosse Menge an Bisenlagen registriert werden. Diese müsste man dann mit Daten aus Höhensondierungen, wie sie in Payern gemacht werden, vergleichen. Es wäre ebenfalls das Gebiet zwischen Jura und Alpen als günstiger Standort zu wählen, weil dort die Bise grosse Geschwindigkeiten erreichen kann und so Druckschwankungen noch besser sichtbar gemacht würden. Payern wäre deshalb ein sehr guter Standort für Messungen.

## 8. Mathematische Hilfsmittel

### 8.1 Fourier-Analyse

Die Fourier Analyse, auch Harmonische Analyse genannt, ist eines der wichtigsten mathematischen Hilfsmittel der Ingenieur- und Naturwissenschaften. Da die Fourier Analyse in der Auswertung unserer Messdaten eine grosse Rolle spielt, werde wir in diesem Kapitel die wesentlichen Elemente von diesem mathematischen Verfahren erläutern.

#### 8.1.1 Fourier-Reihe

Jede periodische Funktion  $S(t)$  (d.h.  $S(t+T)=f(t)$ ), die stetig ist oder, im Falle einer Unstetigkeit, sowohl einen links- als auch einen rechtsseitige Grenzwert hat (Dirichletsche Bedingung nach Meyerg & Vachenauer (1999)), lässt sich als eine Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen:

$$(8.1) \quad S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Dabei ist  $\omega = 2\pi/T$ ,  $\omega$  wird als Grundkreisfrequenz bzw.  $n\omega$ ,  $\{n \in \mathbb{N}\}$  als Oberkreisfrequenzen bezeichnet und  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  bzw.  $b_1, b_2, b_3, \dots$  heissen Fourierkoeffizienten.

Dieses trigonometrische Polynom kann auch in komplexer Darstellung geschrieben werden:

$$(8.2) \quad S(t) = \sum_{k=-N}^N c_n e^{ik\omega t}$$

Mit der Euler-Formel  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  erhält man die Umrechnungsformen:

$$(8.3a) \quad c_0 = \frac{1}{2} a_0$$

$$(8.3b) \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n)$$

$$(8.3c) \quad c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + i b_n)$$

(Umrechnung aus Meyerg & Vachenauer 1999)

#### 8.1.2 Entwicklung nach Fourierkoeffizienten

Um den Fourierkoeffizient  $a_0$  aus der Funktion  $f(t)$  zu erhalten integrieren wir Gleichung 8.1 gliedweise im Intervall  $(0, T)$ :

$$(8.4) \quad \int_0^T S(t) dt = \frac{a_0}{2} \int_0^T dt + \sum_{n=1}^N \left( a_n \int_0^T \cos(n\omega t) dt + b_n \int_0^T \sin(n\omega t) dt \right)$$

Da  $T = 2\pi/\omega$ , gilt für die einzelnen Integrale:

$$\int_0^T dt = T, \quad \int_0^T \cos(n\omega t) dt = 0, \quad \int_0^T \sin(n\omega t) dt = 0$$

Gl. 8.4 reduziert sich daher auf

$$(8.5) \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$a_n$  erhalten wir durch die Multiplikation von Gl. 8.1 mit  $\cos(m\pi t)$  wobei  $m \neq N$  ist und integrieren anschliessend wiederum über das Periodenintervall  $(0, T)$ :

$$(8.6) \quad \int_0^T S(t) \cos(m\pi t) dt = \frac{a_0}{2} \int_0^T \cos(m\pi t) dt + \sum_{n=1}^N \left( a_n \int_0^T \cos(n\pi t) \cos(m\pi t) dt + b_n \int_0^T \sin(n\pi t) \cos(m\pi t) dt \right)$$

Die Integrale berechnen sich wie folgt:

$$\int_0^T \cos(m\pi t) dt = 0$$

Für  $m \neq n$ :

$$\int_0^T \cos(n\pi t) \cos(m\pi t) dt = 0$$

und

$$\int_0^T \sin(n\pi t) \cos(m\pi t) dt = 0$$

Für  $n = m$ :

$$\int_0^T \cos(n\pi t) \cos(n\pi t) dt = \int_0^T \cos^2(n\pi t) dt = T/2$$

und

$$\int_0^T \sin(n\pi t) \cos(n\pi t) dt = \int_0^T \sin(n\pi t) \cos(n\pi t) dt = 0$$

Daher folgt aus Gl. 8.6

$$\int_0^T S(t) \cos(n\pi t) dt = a_n T/2$$

und somit

$$(8.7) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos(n\pi t) dt$$

Die Gl. 8.1 wird jetzt mit  $\sin(m\pi t)$  wobei  $m \in \mathbb{N}$  ist multipliziert und anschliessend in den Grenzen von 0 bis T integriert:

$$(8.8) \quad \int_0^T S(t) \sin(m\pi t) dt = \left(\frac{a_0}{2}\right) \int_0^T \sin(m\pi t) dt + \sum_{n=1}^N \left( a_n \int_0^T \cos(n\pi t) \sin(m\pi t) dt + b_n \int_0^T \sin(n\pi t) \sin(m\pi t) dt \right)$$

Diese Integrale werden nun ebenfalls berechnet:

$$\int_0^T \sin(m\pi t) dt = 0$$

Für  $m \neq n$ :

$$\int_0^T \cos(n\pi t) \sin(m\pi t) dt = 0$$

und

$$\int_0^T \sin(n\pi t) \sin(m\pi t) dt = 0$$

Für  $n = m$ :

$$\int_0^T \cos(n\pi t) \sin(n\pi t) dt = 0$$

und

$$\int_0^T \sin(n\pi t) \sin(m\pi t) dt = \int_0^T \sin^2(n\pi t) dt = \frac{T}{2}$$

durch einsetzen in Gl.8.8 erhalten wir:

$$\int_0^T S(t) \sin(m\pi t) dt = \int_0^T S(t) \sin(n\pi t) dt = b_n \frac{T}{2}$$

und somit ergibt sich:

$$(8.9) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin(n\pi t) dt$$

Mit Hilfe von Gleichung 8.5, 8.7 und 8.9 lassen sich nun alle Fourierkoeffizienten berechnen (siehe Tab 8.1), wobei Gl. 8.5 die Vereinfachung von Gl. 8.7 ist, da bei  $n=0$  der Cosinus eins wird. (Herleitung L. Papula 2001)

Tab. 8.1

(8.1)	$S(t) = (a_0/2) + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$
(8.5)	$a_0 = (2/T) \int_0^T S(t) dt$
(8.7)	$a_n = (2/T) \int_0^T S(t) \cos(n\omega t) dt$
(8.9)	$b_n = (2/T) \int_0^T S(t) \sin(n\omega t) dt$

Wir können nun auch die komplexen Fourierkoeffizienten mit Gl. 8.3b, 8.7 und 8.9 berechnen:

$$c_n = 1/2 (a_n - ib_n)$$

Für  $a_n$  setzen wir Gl. 8.7 und für  $b_n$  Gl. 8.8 ein.

$$c_n = (1/2) (2/T) \left( \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt - i \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \right)$$

Wegen der Eulerschen Beziehung können wir  $\cos(n\omega t) = \text{Re}(e^{in\omega t})$  und  $\sin(n\omega t) = \text{Im}(e^{in\omega t})$  setzen.

$$c_n = (1/T) \left( \int_0^T S(t) \text{Re}(e^{in\omega t}) dt - i \int_0^T S(t) \text{Im}(e^{in\omega t}) dt \right)$$

$$c_n = (1/T) \int_0^T (S(t) \text{Re}(e^{in\omega t}) - S(t) i \text{Im}(e^{in\omega t})) dt$$

und wir erhalten die Fourierkoeffizienten  $c_n$  in komplexer Form

$$(8.10) \quad c_n = (1/T) \int_0^T (S(t) e^{-in\omega t}) dt$$

### 8.1.3 Symmetriebetrachtung

Ist eine Funktion  $S(t)$  gerade, d.h. y-Achsen-symmetrisch (d.h.  $S(t) = S(-t)$ ) ist  $b_n = 0$ . Man erhält:

$$(8.11) \quad S(t) = (a_0/2) + \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\omega t)$$

Wenn die Funktion  $S(x)$  ungerade ist (d.h.  $S(-t) = -S(t)$ ), ergibt sich  $a_n = 0$ . Es bleibt nur noch:

$$(8.12) \quad S(t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\omega t)$$

Dabei ist zu beachten, dass für T-periodische Funktionen, folgendes gilt:

$$\int_a^{a+T} S(t) dt = \int_0^T S(t) dt$$

Diese Tatsache ist besonders wichtig, denn andernfalls wäre es beinahe unmöglich eine FFT zu machen (folglich Meyerg & Vachener 1999)

#### 8.1.4 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Hat man N Werte einer T-periodischen Funktion und gilt für  $t_k$  und  $\Delta t$ , wobei  $\Delta t$  äquidistant sind:

$$t_k = k\Delta t, \quad T = N\Delta t$$

Wobei  $0 = k = (N-1)$  und  $k \in \mathbb{N}$  ist.

Hieraus folgt:

$$y_k = f(k\Delta t).$$

Analog Gl. 8.10 wobei  $\Delta t = 2\pi/N$  gesetzt wird erhalten wir (auf eine ausführliche Herleitung verzichte ich. Sie kann aber im Meyerg & Vachener 1999 nachgelesen werden):

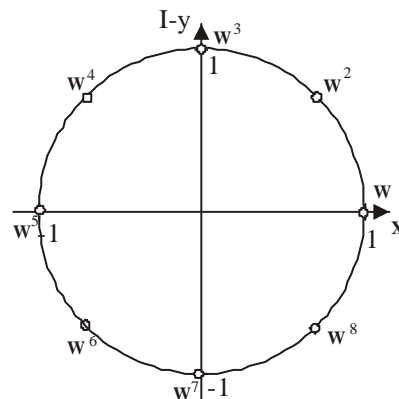
$$(8.13) \quad c_k = (1/N) \sum_{m=0}^{N-1} y_m e^{-km2\pi/N}$$

Dabei gilt  $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ .

Wir setzen nun  $w = e^{2\pi i/N}$ .  $2\pi/N$  ist hier das Argument und  $w$  lässt sich in der Gausschen Zahlenebene als N-te Einheitswurzel darstellen (Abb. 8.1). Setzen wir  $w$  in Gl. 8.13 ein und wir erhalten:

$$(8.14) \quad c_k = (1/N) \sum_{m=0}^{N-1} y_m w^{-km}$$

Abb. 8.1



Darstellung der Einheitswurzel in der Gausschen Zahlenebene.

Fasst man die Fourierkoeffizienten  $c_k$  zu einem Vektor  $\mathbf{c}$  zusammen und führt die  $N \times N$ -Matrix

$$(5.15) \quad \mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & \dots & w^{(N-1)} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w^{(N-1)} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

ein, so kann man (8.13) in Vektorform schreiben

$$(8.16) \quad \mathbf{c} = (1/N) \mathbf{F}_N \mathbf{y}$$

### 8.1.5. Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Wenn die Anzahl Messwerte ein oder mehrere Male den Faktor zwei enthält ( $N=2^m$  wobei  $M \leq N$  ist), kann auf Grund der Symmetrie der Einheitswurzel der Rechenaufwand stark verringert werden (Folglich Meyerg & Vachener 1999).

### 8.2. Spearmansche Rangkorrelation

Wir werden in unserer Arbeit zur Bestimmung von Zusammenhängen oft die Spearmansche Rangkorrelation verwenden. Sie hat den Vorteil, dass sie einfach durchzuführen und sehr robust ist. Wir gehen davon aus, dass dieses mathematische Verfahren nicht allen geläufig ist weshalb wir hier die Theorie in kurzer Form wiedergeben.

Die Spearmansche Rangkorrelation ist gewissermassen eine Weiterentwicklung der Produktmomenten-Korrelation. Sie hat den entscheidenden Vorteil, dass sie nicht nur den linearen Zusammenhang zweier Variablen, sondern alle strengen monotonen Zusammenhänge auffinden kann. Dies ist möglich, weil sie sich auf Ränge stützt. Wobei der Rang einer Zahl an gibt, die wievielte kleinste Zahl sie, von einer bestimmten Menge ist. Sind  $x$  und  $y$  die Grössen die auf ihre Abhängigkeit überprüft werden sollen so gilt folgendes:

$$(Gl. 8.22.) \quad r_{xy} = s_{\text{Rang}(x), \text{Rang}(y)} / (sd_{\text{Rang}(x)} sd_{\text{Rang}(y)})$$

Dabei nimmt  $r_{xy}$  ein Wert zwischen  $-1$  und  $+1$  an,  $sd_{\text{Rang}()}$  ist die Standardabweichung der Ränge und  $s_{\text{Rang}(x), \text{Rang}(y)}$  steht für:

$$(Gl. 8.23.) \quad s_{\text{Rang}(x), \text{Rang}(y)} = 1/(n-1) \sum_i (\text{Rang}(x_i) - \text{Rang}(x)_q) (\text{Rang}(y_i) - \text{Rang}(y)_q)$$

wobei  $n$  gleich dem Stichprobenumfang ist.

Dabei ist  $\text{Rang}()_q$  der Durchschnitt der Ränge. Er lässt sich, wenn keine Bindung vorliegt (d.h. die selbe Zahl nicht zweimal vorkommt), schreiben als:

$$(Gl. 8.24.) \quad \text{Rang}(x)_q = (n+1)/2$$

Durch Einsetzen in Gleichung 8.23. erhalten wir:

$$(Gl. 8.25.) \quad s_{\text{Rang}(x), \text{Rang}(y)} = 1/(n-1) \cdot \left( \frac{\text{Rang}(x) - (n+1)/2}{n-1} \right) \left( \frac{\text{Rang}(y) - (n+1)/2}{n-1} \right)$$

Nach W. A. Stahel 2002 lässt sich Gl. 8.22. vereinfachen zu:

$$(Gl. 8.26.) \quad r_{xy} = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_i (\text{Rang}(x_i) - \text{Rang}(y_i))^2$$

Wenn  $x$  im Zusammenhang mit  $y$  steht, strebt  $r_{xy}$  gegen  $\pm 1$ . Ist  $r_{xy} = -1$ , dann bedeutet dies, dass bei hohem  $x$ -Wert der  $y$ -Wert klein ist und umgekehrt. Wenn  $r_{xy} = 1$  ist, dann haben wir bei grossem  $x$ -Wert ebenfalls einen grossen  $y$ -Wert. Besteht keine Korrelation zwischen dem Wert  $x$  und  $y$  dann ist  $r_{xy} = 0$ .

Neben dem Vorteil, dass die Spearmansche Rangkorrelation viele Arten von Zusammenhängen erkennt, ist sie äusserst robust. Man kann leicht erkennen, dass Messfehler das Ergebnis nicht stark beeinflussen.

### 8.3. Koeffizientenvergleich

Wenn wir zwei Korrelationskoeffizienten vergleichen wollen, können wir dies nach folgendem Verfahren tun. Zuerst müssen wir die Koeffizienten einer  $z$ -Transformation unterziehen.

$$z = 1/2 \ln[(1+r)/(1-r)]$$

$$s^2 = 1/(N-1)$$

Dabei ist  $N$  der Stichprobenumfang,  $s^2$  die Varianz,  $r$  der Korrelationskoeffizient und  $z$  der transformierte Korrelationskoeffizient.

Ist nun  $u$  grösser als 1.960

$$u = \text{Abs}[(z_1 - z_2)] /$$

dann ist ein Unterschied statistisch gesichert (95% Irrtumswahrscheinlichkeit).



## 9. Literaturverzeichnis

1. Burri K. *Schweiz* Lehrmittelverlag des Kantons Zürich 2. Ausgabe 1998
2. Hack K.H. – *Typische Wetterlagen im Alpenraum SPL* – Schweizerischer Pool für Luftfahrtversicherung 1981
3. Georg T.M. & Young J.M. *Passing Sensing of Natural Acoustic-Gravity Waves at Earth Surface* Governor Printing Office Washington D.C. 1972. aus W. Nater 1979
4. Meyerg & Vachenauer – *Höhere Mathematik 2* – Springer – 3. Auflage Juni 1999
5. Nater W.– *Grenzschichtwellen als Ursache für kurzperiodische Luftdruckschwankungen* – *Laboratorium für Atmosphärenphysik ETH* – Juli 1979
6. Papula L. - *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler (Band 2)* – Viewegs Fachbücher der Technik – 10. Auflage Oktober 2001
7. Stahel W.A. *Statistische Datenanalyse Eine Einführung für Naturwissenschaftler* Viewegs Fachbücher der Technik 4. Auflage November 2002
8. Suter A. *Geographie-Skript* Neue Schule Zürich
9. ... *Einführung in die Meteorologie, Atmosphärenphysik und -chemie* Institut für Atmosphärenphysik der ETH WS 2003/2004

## 10. Glossar

$a_n$	Reeller Fourierkoeffizient der Kosinus-Schwingung
$b_n$	Reeller Fourierkoeffizient der Sinus-Schwingung
$\mathbf{c}$	Matrix mit den Spektralkoeffizienten als Elementen
$c_k$	k-ter Spektralkoeffizient der Funktion $S(t)$
DFT	Diskrete Fourier Transformation
FFT	Fast Fourier Transformation
$r_{XY}$	Spearman'sche Rangkorrelation zweier Mengen X und Y
Rang(X)	Rangverteilung der Elemente Menge X
T	Periode einer Schwingung oder Temperatur
$S_{\text{skal}}$	Skalarprodukt des Vektors $\mathbf{r}_k$ und $\mathbf{r}_{k+1}$
$sd_X$	Standartabweichung der Messgrössen X
$\mathbf{v}_{wk}$	Windgeschwindigkeit in der k-ten Schicht
w	Einheitswurzel $w = e^{2\pi i/N}$ (wobei N der Anzahl der Messungen entspricht)
$f_0$	Grundkreisfrequenz
$f_n$	n-te Oberfrequenz
X	Centroid einer Menge ( $X = \sum_n (f_n \cdot I_n) / \sum_n (I_n)$ )
X'	Centroids Differenz einer Menge ( $X' = \sum_n (f_n \cdot \text{Abs}(I_n - I_{n+1})) / \sum_n (\text{Abs}(I_n - I_{n+1}))$ )